El triángulo es el polígono más sencillo, pero no por ello menos interesante. Desde su simplicidad, tiene gran utilidad en todas las cuestiones geométricas. Su forma, rígida, indeformable lo hace insustituible en las estructuras metálicas como los puentes o las torres eléctricas. A pesar de su apariencia frágil, muchas de estas estructuras tienen una belleza serena y espectacular al mismo tiempo.

Leonhard Euler (1707-1783) fue un matemático suizo que descubrió importantes propiedades del ortocentro, baricentro e incentro del triángulo.

BLOQUE 4

Torre Eiffel, en París, Francia.

En este bloque aprenderás a:

- Resolver problemas que implican el uso de las leyes de los exponentes y de la notación científica.
- Resolver problemas geométricos que implican el uso de las propiedades de las alturas, medianas, mediatrices y bisectrices en triángulos.
- Interpretar y relacionar la información proporcionada por dos o más gráficas de línea que representan diferentes características de un fenómeno o situación.
- Resolver problemas que implican calcular la probabilidad de dos eventos independientes.
- Relacionar adecuadamente el desarrollo de un fenómeno con su representación gráfica formada por segmentos de recta.

Sugerencias didácticas

Uno de los temas que se tocarán en este bloque será la notación científica. Algo que puede despertar la inquietud de los alumnos por este tema sería que les pida que investiguen los siguientes datos:

¿Cuánto pesa un virus como el que genera la gripe?

¿Cuánto mide la distancia de la tierra a la galaxia más cercana, que es Andrómeda?

Los estudiantes se sorprenderán de la existencia en la naturaleza de cantidades tan inmensamente grandes o pequeñas. Cuando las conozcan, les costará trabajo interpretarlas o leerlas, pero cuando aprendan la notación científica les será muy fácil; ésta es una excelente motivación para despertar su interés por este tema.

Valoración del desempeño

- Valorar los conocimientos previos del estudiante necesarios para abordar las temáticas de este bloque.

Sugerencias didácticas

Es muy importante que el alumno logre deducir por sí mismo el motivo por el cual la potenciación es la operación que permite expresar la cantidad más grande utilizando un solo número. El profesor puede ser una guía que lo lleve a reflexionar por qué la suma o la multiplicación son operaciones que no satisfacen tal propiedad.

Debemos cerciorarnos de que el alumno comprenda cómo opera la potenciación de un número y cuál es su significando aritmético; esto será más sencillo si el profesor aplica las propiedades de los exponentes para simplificar expresiones y abreviar cálculos. Esto lo llevará inevitablemente al tema de las *leyes de los exponentes*.

Lección 70 El número más grande posible

¿Sabías que la potenciación es una operación matemática y que las potencias se pueden multiplicar o dividir?

1 **Averigüen cuál es el número más grande que se puede escribir utilizando tres cifras "2" y las operaciones que consideren necesarias.**

Por ejemplo, un número podría ser: $\frac{2}{2} + 2$

2 **Con ayuda de su profesor o profesora, analicen los números encontrados y determinen cuál es el más grande.**

Anótalo. 2^{22}

3 **Utilicen ahora tres cifras "3" y las operaciones que consideren necesarias para escribir el número más grande posible.**

Anótalo. 3^{33}

4 **Con ayuda de su profesor o profesora, comparen el número que escribieron con los de otros equipos. Si hubo un número más grande que el de ustedes, anótalo:**

____

5 **Lee la siguiente información.**

Seguramente habrás notado que un número puede expresarse de distintas maneras. Por ejemplo, $\frac{2}{2} + 2$ es una manera de expresar el número tres. Quizá tus compañeros y tú se dieron cuenta de que la operación que permite expresar el número más grande posible es la potenciación. Así, con tres cuatros el número más grande posible es 4^{44}, que si se escribiera con todas sus cifras tendría ¡27!

6 **Escriban en notación exponencial los siguientes productos de factores iguales.**

a) $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$

b) $1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1^5$

c) $(a)(a)(a) = a^3$

d) $(m)(m)(m)(m) + (n)(n) = m^4 + n^2$

7 **Escriban las siguientes expresiones como productos de factores iguales y calculen el resultado, como en los ejemplos.**

a) $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$

b) $5^2 = 5 \times 5 = 25$

c) $3^4 + 3^2 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 + 3 \times 3 = 90$

d) $5^3 - 5^2 = 5 \times 5 \times 5 - 5 \times 5 = 100$

e) $(2^3)(2^2) = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$

f) $(3^3)(3^2) = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$

© ediciones sm

© ediciones sm

g) $\frac{2^3}{2^3} = \frac{2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2} = 1$

h) $\frac{3^3}{3^2} = \frac{3 \times 3 \times 3}{3 \times 3} = \frac{27}{9} = 3$

i) $(a^2)\,(a^3) = a \times a \times a \times a \times a = a^5$

j) $\frac{b^3}{b^2} = \frac{b \times b \times b}{b \times b} = b$

k) $\frac{5^2}{5^2} = \frac{5 \times 5}{5 \times 5} = 1$

l) $\frac{n^2}{n^2} = \frac{n \times n}{n \times n} = 1$

8 **Con ayuda de su profesor o profesora, comparen los resultados que obtuvieron en las operaciones anteriores, con los de otros equipos.**

9 **Analicen cada uno de los siguientes enunciados y determinen si es cierto o falso. Antes de escribir sí o no, prueben con algunos ejemplos.**

Recuerden que el factor que se repite se llama **base** de la potencia y el número de veces que se repite ese factor es el **exponente**.

Enunciados	Cierto	Falso
La suma de dos potencias de la misma base es igual a la base elevada a la suma de los exponentes.		✓
La diferencia de dos potencias de la misma base es igual a la base elevada a la diferencia de los exponentes.		✓
El producto de dos potencias de la misma base es igual a la base elevada a la suma de los exponentes	✓	
El cociente de dos potencias de la misma base es igual a la base elevada a la diferencia de los exponentes	✓	
Todo número elevado a la potencia cero es igual a 1	✓	

10 **Con ayuda de su profesor o profesora, comparen sus respuestas de la tabla con las de otros equipos. Si hay diferencias, usen ejemplos para mostrar que se tiene o no razón.**

11 **Comenta con tus compañeros la siguiente información.**

El producto de dos potencias de la misma base es igual a la misma base elevada a la suma de los exponentes. Por ejemplo, $2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$

El cociente de dos potencias de la misma base es igual a la misma base elevada a la diferencia de los exponentes. Por ejemplo, $\frac{3^3}{3^2} = 3^{3-2} = 3^1 = 3$

Cuando el dividendo y el divisor tienen la misma base y el mismo exponente, el resultado es la base elevada a la cero potencia. Por ejemplo, $\frac{3^3}{3^3} = 3^{3-3} = 3^0 = 1$

12 **Usa las propiedades anteriores para resolver lo siguiente:**

a) $\frac{5^{25}}{5^{23}} = 5^{25-23} = 5^2 = 25$

b) $8^2 \times 8^3 = 8^{2+3} = 8^5 = 32\,768$

c) $126^0 = 1$

d) $a^2\,(a^5) = a^{2+5} = a^7$

© ediciones sm

Valoración del desempeño

- Comprender el significado y la forma en que opera la potenciación de un número.
- Aprender las leyes de los exponentes que funcionan en la multiplicación y el cociente de expresiones que involucran un número elevado a cierta potencia.

© ediciones sm

Sugerencias didácticas

Para que el alumno logre una mejor comprensión del tema, además de ejercitarse en la reducción de términos con la misma base haciendo uso de las leyes de los exponentes, es conveniente que el profesor le pida que simplifique más expresiones que implican diversos tipos de operaciones combinadas, por ejemplo;

$$(a^3 + a^3) / a^2 = 2a^3 / a^2 = 2a$$

Ya que un error frecuente en los estudiantes es el siguiente cálculo:

$$2a^1 + a^2 = 3a^3 \qquad \textbf{INCORRECTO}$$

Un recurso que puede utilizar el profesor es la explicación de la siguiente igualdad:

$$a^0 = 1$$

Explicarle al alumno que 10 elevado a la cero, y en general cualquier numero elevado a la cero, es siempre 1; de este modo, al trabajar con las potencias negativas, se dará cuenta de que se siguen cumpliendo las mismas leyes de los exponentes que ya había aprendido.

Lección 71 ¿Qué significa tres a la menos dos?

¿Sabías que los números muy pequeños también pueden expresarse como potencias de 10?

1 **En la lección anterior se concluyó que el cociente de dos potencias de la misma base es igual a la base elevada a la diferencia de los exponentes, $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ Usando esta propiedad, anoten lo que hace falta en la siguiente tabla.**

Expresión	Forma multiplicativa	Resultado exponencial	Resultado simple
$\frac{6^3}{6^2}$	$\frac{6 \times 6 \times 6}{6 \times 6}$	$6^{3-2} = 6^1$	6
$\frac{10^4}{10^2}$	$\frac{10 \times 10 \times 10 \times 10}{10 \times 10}$	10^{4-2} n $= 10^2$	100
$\frac{4^{15}}{4^{15}}$	$\frac{4 \times 4 \times 4 \times \text{(hasta 15)}}{4 \times 4 \times 4 \times \text{(hasta 15)}}$	$4^{15-15} = 4^0$	1
$\frac{3^2}{3^3}$	$\frac{3 \times 3 \times}{3 \times 3 \times 3}$	$3^{2-3} = 3^1$	$\frac{1}{3}$
$\frac{2^3}{2^5}$	$\frac{2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}$	$2^{3-5} = 2^{-2}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{3^{15}}{3^{17}}$	$\frac{3 \times 3 \times \ldots \times 3 \text{ (15 veces)}}{3 \times 3 \times \ldots \times 3 \text{ (17 veces)}}$	$3^{15-17} = 3^{-2}$	$\frac{1}{9}$
$\frac{a^x}{a^y}$	$\frac{a \times a \times a \ldots x \text{ veces}}{a \times a \times a \ldots y \text{ veces}}$	$a^{x-y} = a^z$	a^z
$\frac{b^n}{b^n}$	$\frac{b \times b \times b \ldots}{b \times b \times b \ldots}$	$b^{n-n} = b^0$	1

2 **Con ayuda de su profesor, revisen los resultados de la tabla. En particular, verifiquen que los siguientes enunciados son ciertos.**

a) El exponente negativo surge de una división de dos potencias de la misma base, en la que el exponente del dividendo es menor que el exponente del divisor.

Por ejemplo, $\frac{10^3}{10^5} = 10^{-2}$

b) Un número entero elevado a un exponente negativo es igual a una fracción cuyo numerador es uno y cuyo denominador es el mismo número con exponente positivo.

Por ejemplo, $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0.01$

3 **Expresen las siguientes potencias como números decimales.**

a) $10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10\,000} = 0.0001$

b) $10^{-6} = \frac{1}{10^6} = 0.000001$

c) $2^{-5} = \frac{1}{2^5} = 0.03125$

d) $3 \times 10^{-5} = \frac{3}{10^5} = \frac{3}{10\,0000} = 3 \times 0.00001 = 0.00003$

© ediciones sm®

© ediciones sm®

4 **Con ayuda de su profesor o profesora, comparen sus resultados con los de otros equipos.**

5 **Con base en las siguientes expresiones exponenciales formadas con tres cincos, hagan lo siguiente:**

5^{55} $\qquad$ 55^{5} $\qquad$ $(5^{5})^{5}$ $\qquad$ $5^{5^{5}}$

a) Elijan la que expresa el número mayor y enciérrala en un círculo.

b) Expliquen por qué consideran que la expresión que eligieron representa el número mayor:

R. L. Porque 5^{5} es mucho más grande que 55.

c) Pongan una palomita a la expresión que se lee "cinco elevado a la cincuenta y cinco".

d) Escriban cómo se lee la expresión que está a la derecha de $(5^{5})^{5}$:

Quinta potencia de cinco elevado a la quinta potencia.

e) Si en vez de estar formadas con tres cincos, las expresiones estuvieran formadas con tres cifras "2", ¿seguiría representando el número mayor el tipo de expresión que eligieron? No.

6 **Con ayuda de su profesor o profesora, revisen las respuestas a las preguntas anteriores.**

7 **Lee la siguiente información.**

Las expresiones como $(5^{5})^{5}$; $(3^{2})^{3}$; $(4^{3})^{2}$; $(a^{b})^{n}$; se llaman *potencias de potencias*, puesto que se trata de una potencia elevada a otra potencia. Por ejemplo 3^{2} que es una potencia, a su vez está elevado a la tercera potencia. Su resultado es: $(3^{2})^{3} = (9)^{3} = 729$. Este resultado también se puede obtener así: $(3^{2})^{3} = 3^{2(3)} = 3^{6} = 729$

8 **Calculen el resultado de las siguientes expresiones.**

a) $(5^{5})^{5} = 5^{5(5)} = 5^{25} = 2.98 \times 10^{17}$

b) $(4^{3})^{2} = 4^{3(2)} = 4^{6} = 4\,096$

c) $(a^{b})^{n} = a^{b(n)}$

d) $(4^{2})^{3} = 4^{2(3)} = 4^{6} = 4\,096$

4.1. Resolver potencia de una potencia. Interpretar el significado de elevar un número natural a una potencia de exponente negativo.

Valoración del desempeño

- Comprender el significado y la forma en que opera la potenciación de un número elevado a un exponente negativo.
- Aprender las leyes de los exponentes que funcionan en la potencia de una potencia.

Sugerencias didácticas

Es muy formativo para el estudiante lograr darse cuenta de que gracias a la notación científica es posible expresar cantidades enormemente grandes o pequeñas de manera muy abreviada, cómoda y fácil de trabajar.

El profesor puede hacer énfasis en que esto le permitirá, entre otras cosas, la comparación de cantidades cuyos dígitos son prácticamente imposibles de manejar.

Lección 72 Cantidades astronómicas o microscópicas

¿Sabías que a la potenciación suele llamársele "la quinta operación matemática"? ¿Y que esta operación es útil para expresar cantidades muy grandes o muy pequeñas?

1 **Expresa los siguientes números con el número 10, elevado a una determinada potencia. Por ejemplo, 100 000 = 10^5**

10 000 = 10^4 1000 = 10^3 100 = 10^2 10 = 10^1 1 = 10^0

0.1 = 10^{-1} 0.01 = 10^{-2} 0.001 = 10^{-3} 0.000 1 = 10^{-4}

2 **Analicen cada una de las cantidades registradas en la siguiente tabla y escriban si es del orden de los millones, miles de millones, billones, miles de billones, trillones, millonésimos, etcétera.**

Descripción	Cantidad	Es del orden de los
Distancia en km de la Tierra a la nebulosa Andrómeda	95 000 000 000 000 000 000	Trillones
Masa del Sol en kg	1 983 000 000 000 000 000 000 000 000 000	Cuatrillones
Medida de la superficie terrestre en m²	510 000 000 000 000	Billones
Tamaño aproximado de una molécula de aire en cm	0.000000001	Mil millonésima
Masa de la atmósfera de La Tierra en kg	5 100 000 000 000 000 000	Trillones
Cantidad aproximada de segundos que hay en un año	30 000 000	Millones
Masa de un electrón en kg	0.000000000000000000000000000000009	Cuatrimillonésimos
Masa de la Tierra en kg	610 000 000 000 000 000 000 000 000	Trillones

3 **Con base en la información que aparece en la tabla anterior, traten de resolver el siguiente problema: ¿Cuántas veces mayor es la masa de la Tierra que la masa de la atmósfera que la rodea?**
Pueden usar calculadora. ________________

4 **Con ayuda de su profesor o profesora, comparen sus resultados y comenten sobre los procedimientos utilizados.**

© ediciones sm

© ediciones sm

5 **Lee la siguiente información.**

Seguramente sabes que el problema anterior se puede resolver mediante la siguiente división:

610 000 000 000 000 000 000 000 000 ÷ 5 100 000 000 000 000 000

¡La dificultad está en el tamaño de los números! Sin embargo, estos mismos números se pueden expresar así: $6.1 \times 10^{26} \div 5.1 \times 10^{18}$ Esta manera de expresar los números usando potencias de 10 se llama *notación científica* y, como podrás ver, facilita los cálculos.

$6.1 \times 10^{26} \div 5.1 \times 10^{18} = (6.1 \div 5.1) \times (10^{26} \div 10^{18}) = 1.2 \times 10^{8} = 120\ 000\ 000$

La masa de un electrón, que es una cantidad muy pequeña, en notación científica se escribe así: 9×10^{-31}

6 **Anoten los datos que hacen falta en la siguiente tabla.**

Número	Notación científica
95 000 000 000 000 000 000	9.5×10^{19}
1 983 000 000 000 000 000 000 000 000 000	1.983×10^{30}
510 000 000 000 000	5.1×10^{14}
30 000 000	3×10^{7}
0.000000001	1×10^{-4}
0.00000000025	2.5×10^{-10}

7 **Utilicen la notación científica para resolver los siguientes problemas**

a) ¿Cuántas veces mayor es la masa del Sol que la masa de la Tierra? 3 251

b) ¿Qué fracción de 1 año es un segundo? 3.17×10^{-8}

8 **Con ayuda de su profesor o profesora, comparen sus resultados y analicen los procedimientos utilizados.**

4.1. Utilizar la notación científica para realizar cálculos en los que intervienen cantidades muy grandes o muy pequeñas.

© ediciones sm

Valoración del desempeño

- Conocer y aprender a manejar la notación científica.
- Ser capaz de convertir una expresión arbitraria a notación científica y viceversa.
- Comparación de cantidades astronómicas y microscópicas.

Otros recursos

Una buena referencia para ejemplos y utilización de la notación científica, es el siguiente sitio:
http://www.asifunciona.com/ciencia/ke_notacion_cientifica/ke_notacion_cientifica_1.htm

© ediciones sm

Sugerencias didácticas

En esta lección, el profesor puede aprovechar para mostrar al alumno uno de los más importantes razonamientos utilizados en matemáticas: intentar minimizar al máximo las hipótesis de un problema, y que éstas nos lleven al mismo resultado. Decimos esto porque el tema de congruencia de triángulos guiará al alumno a través de las siguientes lecciones a los “criterios de congruencia”, tema que se presta muy bien para hacer hincapié en la importancia de tal razonamiento matemático.

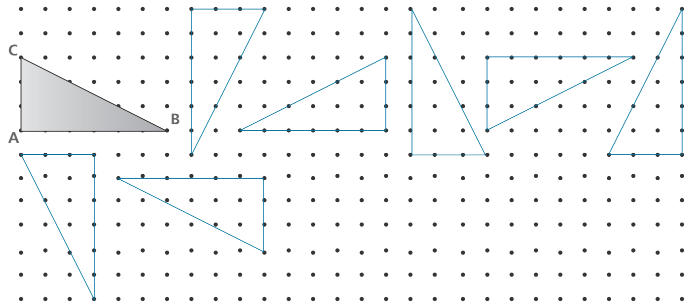
Debemos cerciorarnos de que, durante el ejercicio 6, el alumno comience a eliminar ciertos criterios que no lo llevarán a la conclusión de la congruencia entre dos triángulos.

Lección 73 Iguales o diferentes

Seguramente sabes que un triángulo tiene tres lados y tres ángulos, pero ¿cuáles de esos 6 datos es necesario conocer para poder construir un triángulo que sea igual a otro?

1 Utiliza una regla o una escuadra para hacer lo siguiente.

a) Traza varios triángulos que sean iguales al triángulo **ABC**, pero en distinta posición. Usa como vértices los puntos.



b) ¿Cuántos triángulos lograste construir?

2 Realiza lo siguiente con tus compañeros y compañeras.

a) El compañero o compañera que logró construir más triángulos, platique a los demás en qué se basó.
b) Entre todos, traten de contestar la siguiente pregunta.

¿Cuál es el máximo número de triángulos que se puede construir, iguales en forma y tamaño al original y cuyos vértices estén en los puntos marcados? 8

3 Con ayuda de su profesor o profesora, hagan lo siguiente.

a) Vean si alguno de los equipos logró construir más triángulos que los demás.
b) Verifiquen que el triángulo **ABC** dibujado arriba puede tener 8 posiciones diferentes, considerando que sus vértices deben estar sobre los puntos marcados.

4 Lee la siguiente información:

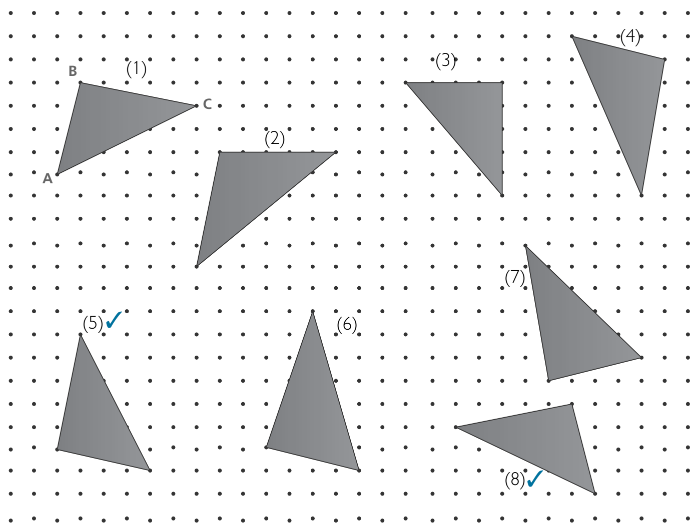
Los triángulos que tienen sus lados y ángulos iguales, aunque tengan diferente posición, se llaman **congruentes**.

© ediciones sm

© ediciones sm

5 **Hagan lo siguiente.**

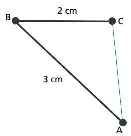
a) Analicen los siguientes triángulos y marquen con una palomita los que son congruentes al triángulo **ABC**.



b) Con ayuda de su profesor o profesora, revisen si todos los equipos pusieron palomita a los mismos triángulos. Si hay diferencia, argumenten para mostrar que tienen razón.

6 **La siguiente figura muestra dos lados de un triángulo incompleto.**

a) Completa el triángulo.



b) Dibuja otro triángulo que tenga un lado igual a **AB** y otro lado igual a **BC**, pero que no sea congruente con el triángulo **ABC**. R. L.

c) ¿Cuántos triángulos más podrás construir que no sean congruentes con el triángulo **ABC**?

Una infinidad

7 **Con ayuda de su profesora o profesor, analicen las respuestas a la pregunta anterior y traten de llegar a una conclusión en la que todos estén de acuerdo.**

© ediciones sm

Valoración del desempeño

- Comprender el significado de los triángulos congruentes.
- Llegar a la conclusión de que no es necesario saber que se tienen los tres lados y los tres ángulos iguales para inferir que dos triángulos son congruentes, es decir, con menos información se puede llegar a la misma conclusión.

Otros recursos

Para apoyar el estudio introductorio de los criterios de congruencia entre triángulos, sugerimos visite el siguiente sitio:
http://www.comenius.usach.cl/webmat2/conceptos/desarrolloconcepto/congruencia_desarrollo.htm

© ediciones sm

Sugerencias didácticas

Es importante que el profesor promueva que el estudiante elabore estrategias personales para desarrollar su intuición geométrica, y ésta intuición lo lleve, con la ayuda de juegos y ejercicios, a acercarse a los primeros criterios de congruencia de triángulos. Recordemos que se les llama criterios de congruencia porque son los enunciados que proporcionan la información mínima necesaria que se debe conocer sobre dos triángulos para asegurar que éstos sean semejantes.

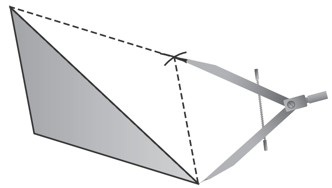
Lección 74 ¿Qué figura resulta?

Trazar un triángulo que sea congruente con otro triángulo es una tarea fácil, con ayuda de una regla y un compás.

1 Con cada uno de los siguientes triángulos, haz lo siguiente.

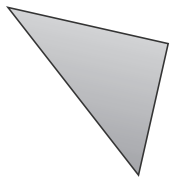
a) Elige uno de los lados del triángulo.
b) Sobre el lado que elegiste vas a trazar un triángulo congruente al que ya está trazado, utilizando la regla y el compás, como se muestra en el ejemplo I.
c) Antes de hacer el trazo, trata de imaginar qué figura formarán el triángulo que vas a trazar y el que ya está formado, y anota su nombre sobre la línea. Haz el trazo y verifica si es correcto lo que imaginaste.

I Triángulo obtusángulo



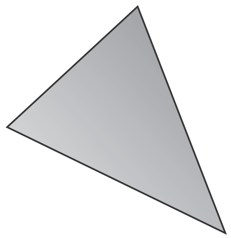
papalote

II Triángulo rectángulo



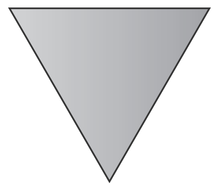
rectángulo

III Triángulo isósceles

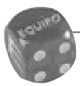


paralelogramo

IV Triángulo equilátero



rombo



2 Realicen lo siguiente.

a) Comenten sobre el procedimiento que utilizaron para trazar los triángulos congruentes.

b) Averigüen entre todos cómo tendría que ser el triángulo original, para que al trazar sobre uno de sus lados un triángulo congruente, resultara un cuadrado. Realicen los trazos y verifiquen si obtienen un cuadrado. triángulo rectángulo isósceles

© ediciones sm

© ediciones sm

3 **Efectúen lo siguiente con ayuda de su profesor o profesora.**

Elijan uno de los triángulos de la página anterior y traten de imaginar todas las figuras que se pueden obtener a partir de ese triángulo, dependiendo de en qué lado se construya el triángulo congruente. Anota en seguida el resultado del análisis.

Triángulo elegido: R. L.

Figuras que se pueden obtener: R. L.

4 **Reúnete con un compañero o compañera para hacer lo siguiente.**

a) Trace cada uno un triángulo en una hoja blanca, sin que el otro lo vea.

b) Anote cada uno, en un papelito, la información mínima necesaria para que la pareja pueda construir un triángulo congruente. No se vale poner dibujos.

c) Intercambien los papelitos y traten de construir los triángulos.

d) Pongan, a contraluz, un triángulo sobre otro para ver si son congruentes y determinen si la información fue suficiente.

5 **Con ayuda de su profesor o profesora, hagan lo siguiente:**

a) Comenten cómo les fue en la actividad anterior: lean algunos de sus mensajes, digan si los triángulos construidos fueron congruentes o no, y, si no lo fueron, digan por qué creen que fallaron.

b) Elijan al menos dos de los mensajes que permitieron construir triángulos congruentes y anótenlos.

Primer mensaje:

___

___

Segundo mensaje:

___

___

c) Entre todos, traten de explicar por qué algunos triángulos sí salieron congruentes a los originales y otros no. Anota aquí al menos uno de los argumentos que encontraron:

___

___

___

criterios de congruencia

4.2. Determinar los criterios de congruencia de triángulos a partir de construcciones con información determinada.

© ediciones sm

Valoración del desempeño

- Construir un triángulo congruente a otro triángulo dado, utilizando únicamente regla y compás.
- Conocer los primeros criterios de congruencia de triángulos.

© ediciones sm

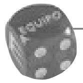
Sugerencias didácticas

A través del juego propuesto en el ejercicio 1, el profesor puede organizar al grupo para que los estudiantes encuentren por sí mismos los tres criterios de congruencia de triángulos.

Es de suma importancia la realización del ejercicio 4, ya que éste le permitirá al alumno comprender que otras medidas del triángulo tales como la altura y la base no lo llevarán a la construcción de triángulos congruentes, y así ira descartando ideas erróneas sobre los criterios de congruencia.

Lección 75 Mensajes breves pero efectivos

Si sólo se conocen las medidas de dos lados de un triángulo, se pueden construir muchos triángulos diferentes. ¿Cuál es la información necesaria para que todos los triángulos que se construyan sean congruentes?



1 Realicen la siguiente actividad.

a) Elijan un grupo de datos de entre los que se presentan a continuación.

Lado AB: 4 cm
Lado AC: 6 cm
Ángulo A: 48°

Ángulo A: 56°
Ángulo B: 75°
Ángulo C: 49°

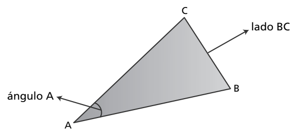
Lado AB: 4 cm
Ángulo A: 65°

Ángulo A: 70°
Ángulo B: 68°

Ángulo A: 43°
Ángulo B: 87°
Lado AB: 6 cm

Lado AB: 3 cm
Lado AC: 5 cm
Lado BC: 7 cm

La forma de nombrar los lados y ángulos es como se muestra en la siguiente figura.



Con base en los datos elegidos, cada integrante del equipo trate de construir un triángulo distinto a los de sus compañeros. Antes de iniciar los trazos, entre todos traten de prever si podrán hacer triángulos diferentes o si éstos tendrán que ser congruentes.

b) Cuando todos terminen de construir sus triángulos, compárenlos y vean si acertaron en su previsión. Si no acertaron, traten de explicar por qué.

c) Elijan otro grupo de datos y repitan el proceso.

d) Pongan una palomita a los grupos de datos que contienen la información suficiente para que todos los triángulos que se construyan sean congruentes y un tache a los que les falte información.

© ediciones sm

© ediciones sm

2 **Con el apoyo de su profesor o profesora, hagan lo siguiente:**

a) Vean si todos los equipos pusieron taches o palomitas en los mismos grupos de datos. Si hay diferencias, averigüen entre todos quién tiene razón.

b) Anoten la información que hace falta en los recuadros donde pusieron tache.

3 **Lee la siguiente información.**

Para poder construir un triángulo que sea congruente con otro triángulo dado, no es necesario conocer las medidas de los tres lados y los tres ángulos, es suficiente conocer cualquiera de los siguientes grupos de datos:

Las medidas de sus tres lados (LLL), o bien,
las medidas de dos lados y el ángulo que forman (LAL), o bien,
laas medidas de un lado y los ángulos en sus extremos (ALA).

4 **Analicen la siguiente pregunta y traten de llegar a una conclusión. ¿Si dos triángulos tienen respectivamente iguales su base y su altura, podemos estar seguros de que son congruentes? Anota la conclusión de tu equipo:**

R. L. No. Los ángulos pueden cambiar.

Ejemplo: un triángulo rectángulo y equilátero.

5 **Con ayuda de su profesor o profesora, revisen las conclusiones de los equipos y busquen argumentos para defender sus puntos de vista. Anota la conclusión del grupo:**

R. L.

6 **Reúnete con un compañero o compañera para hacer lo siguiente.**

a) Trace cada uno un rombo en una hoja blanca, sin que el otro lo vea.

b) Anote cada uno, en un papelito, la información mínima necesaria para que la pareja pueda construir un rombo congruente.

c) Intercambien los papelitos y traten de construir los rombos.

d) Pongan, a contraluz, un rombo sobre otro para ver si son congruentes y determinen si la información fue suficiente.

© ediciones sm

Valoración del desempeño

- Comprender los tres criterios de congruencia (LLL), (LAL) y (ALA), y ser capaz de argumentar por qué sólo existen esos tres y no más.
- Utilización de tales criterios para la construcción de diferentes figuras geométricas congruentes.

Otros recursos

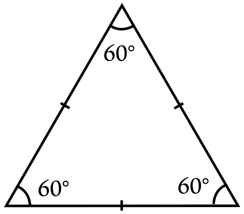
Para apoyar al estudiante en su argumentación sobre los criterios de congruencia, puede visitar el siguiente sitio:
http://www.comenius.usach.cl/webmat2/conceptos/desarrolloconcepto/congruencia_desarrollo.htm

© ediciones sm

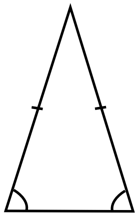
Sugerencias didácticas

Es importante que el profesor remarque que la clasificación de los triángulos está en función de dos medidas representativas de éstos:

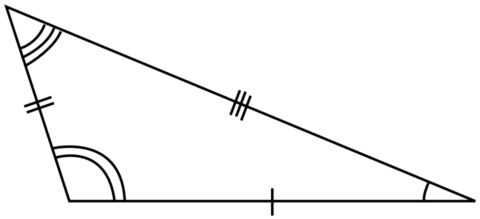
- La medida de sus lados: equilátero, isósceles y escaleno.
- La medida de sus ángulos: acutángulo, rectángulo y obtusángulo.



equilatero



isósceles



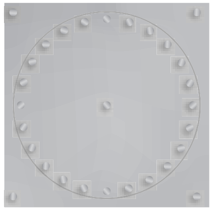
escaleno

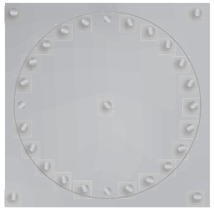
Mediante el ejercicio 5, el profesor estimulará la abstracción geométrica del estudiante y aprovechará para cerciorarse de que las propiedades de los triángulos son manejadas con fluidez por los alumnos, como la de que la suma de los ángulos interiores de un triángulo debe ser 180 grados.

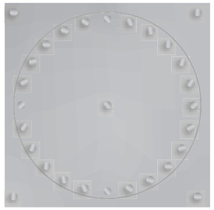
Lección 76 Tipos de triángulos

¿Sabes cuántos tipos de triángulos hay? En esta lección conocerás los nombres de los distintos tipos de triángulos, así como los criterios para clasificarlos.

1 **Utiliza tu geoplano circular para formar con una liga los siguientes triángulos, y regístralos en estos geoplanos.**







a) Un triángulo con dos lados iguales y uno diferente.

b) Un triángulo con tres lados iguales.

c) Un triángulo con tres lados diferentes.

2 **Comparen sus triángulos con los de sus compañeros y compañeras. Comenten si cumplen la condición que se indica y si todos son iguales. Lean la siguiente información.**

Los triángulos que tienen sus tres lados desiguales se denominan **triángulos escalenos**.

Los triángulos que al menos tienen dos lados iguales se llaman **triángulos isósceles**.

De los tres triángulos de la actividad 1, uno es escaleno y dos isósceles.

a) ¿Qué triángulo es escaleno? el c

b) ¿Cuáles son isósceles? el a y b

c) Uno de los triángulos isósceles tiene sus tres lados iguales. ¿Cuál es? el b

Los triángulos que tienen sus tres lados iguales se conocen como **triángulos equiláteros**.

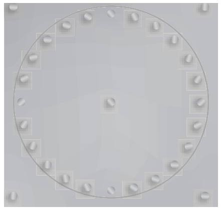
d) La siguiente afirmación es verdadera: todo triángulo equilátero también es isósceles. Explica por qué.

Es suficiente que tenga 2 lados iguales para ser isósceles y el triángulo equilátero tiene 3 lados iguales.

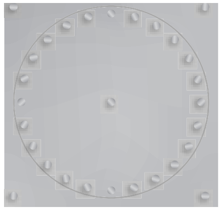
© ediciones sm

© ediciones sm

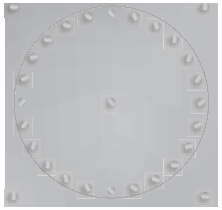
3 **Forma en tu geoplano circular los triángulos que cumplan las siguientes condiciones, y regístralos en estos geoplanos.**



a) Un triángulo isósceles con un ángulo de 90°.



b) Un triángulo escaleno con un ángulo mayor que 90°.



c) Cualquier triángulo que tenga sus tres ángulos menores que 90°.

4 **Realicen lo que a continuación se indica.**

a) Revisen si los triángulos cumplen las condiciones pedidas y compárenlos.

b) Lean la siguiente información y contesten las preguntas.

> Los triángulos que tienen tres ángulos agudos, es decir, menores que 90°, se denominan **triángulos acutángulos**.
>
> Los triángulos que tienen un ángulo recto, es decir, de 90°, se llaman **triángulos rectángulos**.
>
> Los triángulos que tienen un ángulo obtuso, es decir, mayor que 90°, se conocen como **triángulos obtusángulos**.

De los triángulos formados en tu geoplano:

- ¿Cuál es acutángulo? ____________ ¿Cuál es rectángulo? ____________
- ¿Cuál es obtusángulo? ____________

5 **Comenten si es posible que un triángulo:**

a) Sea equilátero y rectángulo a la vez. No. En el equilátero todos los ángulos miden lo mismo.

b) Sea isósceles y acutángulo a la vez. Sí.

c) Tenga más de un ángulo recto. No. La suma de los 3 ángulos deben ser de 180°.

d) Tenga más de un ángulo obtuso. No. Por la razón anterior.

Construyan un ejemplo de los casos posibles en su geoplano. R. L.

© ediciones sm

Valoración del desempeño

- Descripción, construcción y clasificación de los diferentes tipos de triángulos de acuerdo con el tamaño de sus lados y de sus ángulos.
- Utilizar las propiedades generales de los triángulos.

Otros recursos

En la siguiente página encontrará más ilustraciones sobre los diversos tipos de triángulos:
http://www.escolar.com/avanzado/geometria010.htm

© ediciones sm

185

Sugerencias didácticas

El profesor puede observar que si bien las mediatrices de los lados de un triángulo no son medidas usadas en los criterios de congruencias (tema anterior), sí sirven para otras cosas, en este caso para determinar el centro de la circunferencia circunscrita a un triángulo.

Cabe señalar que decimos "la circunferencia circunscrita" porque ésta es única, así como el circuncentro. Para estimular la intuición geométrica de los alumnos, recomendamos al profesor plantear al grupo las siguientes preguntas:

¿Por qué el circuncentro es único?

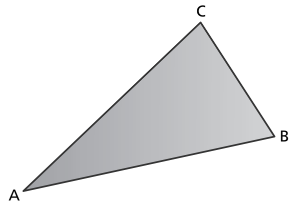
¿Cómo lo probarías?

Lección 77 Un triángulo al interior de un círculo

¿Es posible trazar una circunferencia que pase por los tres vértices de un triángulo?

1 **Tracen en su cuaderno un triángulo que sea escaleno y acutángulo y nombren sus vértices como A, B y C.**

Después, intenten trazar un círculo cuya circunferencia pase por **A**, **B** y **C**. Si lo logran, traten de explicar cómo encontrar el centro del círculo de una manera que no sea al tanteo.



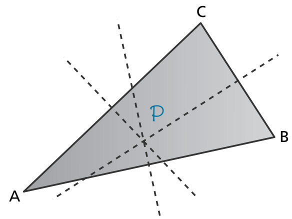
2 **Ahora conocerás una forma de trazar la circunferencia anterior, si acaso no la has descubierto.**

a) En una hoja de papel traza un triángulo **ABC** como el anterior.

b) Dobla el papel de manera que el vértice **A** quede exactamente encima del vértice **B**; marca bien el doblez. ¿Cómo se llama la recta que se marcó? Mediatriz

- Ahora dobla el papel de manera que el vértice **A** quede encima del vértice **C** y, marca también el doblez.
- Finalmente haz que el vértice **B** quede encima del vértice **C**.

Si hiciste bien los dobleces, las líneas marcadas deben cortarse en un solo punto, como muestra la figura.



c) Nombra **P** el punto en que se cortan las tres líneas. Mide las distancias de **P** a cada uno de los vértices.

PA = 2.6 cm **PB** = 2.6 cm **PC** = 2.6 cm

d) **P** es el centro del círculo que pasa por los tres vértices; verifícalo.

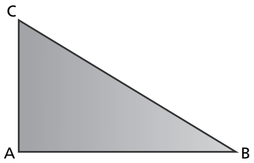
© ediciones sm

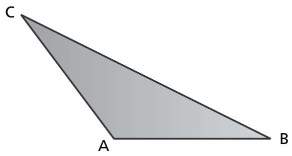
© ediciones sm

Cuando una circunferencia pasa por los tres vértices del triángulo se dice que **circunscribe al triángulo** y se le llama **circunferencia circunscrita**.

Los dobleces que marcaste son las **mediatrices** de los lados del triángulo. Recuerda que la **mediatriz** de un segmento es la perpendicular al segmento en su punto medio. El punto donde se cortan las tres mediatrices se denomina **circuncentro**, pues es el centro de la circunferencia circunscrita.

3 **Traza en hojas un triángulo rectángulo y uno obtusángulo; marca sus mediatrices con dobleces, encuentra el circuncentro y traza el círculo que pase por los vértices.**





a) ¿En dónde quedó el circuncentro en el triángulo rectángulo? Punto medio de la hipotenusa.

b) ¿En dónde quedó el circuncentro en el triángulo obtusángulo? Fuera del triángulo.

4 **Revisa en tu libro de primer grado cómo se traza con regla y compás la mediatriz de un segmento, y después:**

a) Traza en tu cuaderno un triángulo acutángulo, uno rectángulo y otro obtusángulo.

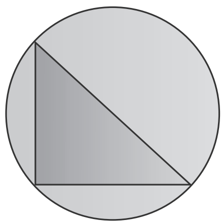
b) Traza la circunferencia circunscrita de cada triángulo.

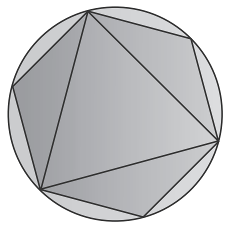
5 **Califiquen como falsa o verdadera cada una de las siguientes afirmaciones y den argumentos para justificar su respuesta.**

a) *El circuncentro de un triángulo siempre queda dentro del triángulo.* F, en un triángulo obtusángulo.

b) *El circuncentro de un triángulo rectángulo se ubica sobre el lado mayor del triángulo.* F.

6 **Traza en tu cuaderno estos diseños. En el primero, los lados iguales del triángulo isósceles deben medir 5 cm y, en el segundo, los lados del triángulo equilátero deben medir 6 cm.**





© ediciones sm

Valoración del desempeño

- Comprender, describir y construir la circunferencia circunscrita a un triángulo.
- Comprender, describir y construir las mediatrices de los lados de un triángulo.
- Comprender, describir y construir el circuncentro de un triángulo.

Otros recursos

Puede encontrar más propiedades sobre las mediatrices en la siguiente página electrónica:
http://mimosa.pntic.mec.es/~clobo/geoweb/recta4.htm

© ediciones sm

187

Sugerencias didácticas

Le sugerimos que intente generar un debate dentro del grupo, en el que los estudiantes logren argumentar sus respuestas a las siguientes preguntas:

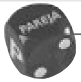
¿Por qué el circuncentro no necesariamente está dentro del triángulo y el incentro sí?

¿También el incentro es único? ¿Por qué?

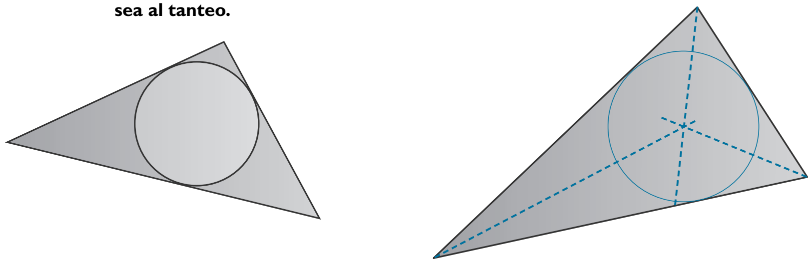
También es conveniente que el profesor resalte que las mediatrices son segmentos construidos a partir de los lados de un triángulo y las bisectrices a partir de sus ángulos; esta observación ayudará al estudiante a no confundir las rectas notables que está aprendiendo.

Lección 78 Un círculo al interior de un triángulo

En esta lección aprenderás a trazar un círculo **inscrito** en un triángulo.

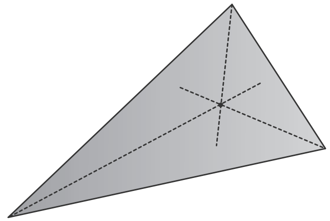


1 **Intenten trazar en el triángulo de la derecha una circunferencia como se muestra en el triángulo de la izquierda. Observen que la circunferencia toca cada lado del triángulo en un solo punto, es decir, cada lado es una tangente. Si lo logran, intenten explicar cómo se puede encontrar el centro del círculo de una manera que no sea al tanteo.**

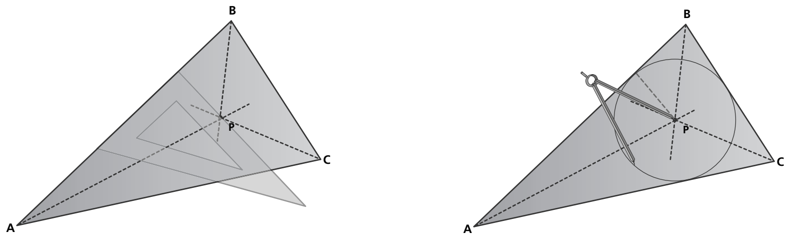


2 **Ahora conocerás una forma de trazar la circunferencia anterior.**

- Traza en una hoja un triángulo que sea escaleno y acutángulo, como los triángulos anteriores, y recórtalo. Divide a la mitad con dobleces cada uno de sus ángulos. Observa que los dobleces corresponden a las bisectrices de los ángulos.
- Si realizaste bien los dobleces, las tres bisectrices deben cortarse en un solo punto, como muestra la figura; ese punto lo llamaremos **P**.
- Traza un segmento que salga de **P** y sea perpendicular a uno de los lados. Observa que no importa qué lado escojas, los segmentos miden lo mismo.



- Apoya tu compás en **P** y ábrelo al tamaño del segmento que trazaste en el punto anterior. Verifica que **P** es el centro del círculo que toca en un solo punto cada uno de los lados del triángulo.



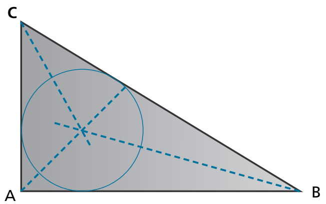
© ediciones sm

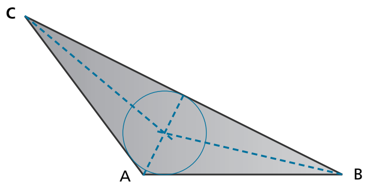
© ediciones sm

Cuando una circunferencia toca en un solo punto cada uno de los tres lados de un triángulo, se dice que la circunferencia está **inscrita en el triángulo**.

El punto donde se cortan las tres bisectrices se llama **incentro**, pues es el centro de la circunferencia inscrita.

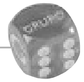
3 **Traza un círculo inscrito en cada uno de los siguientes triángulos.**



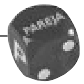


a) ¿En dónde quedó el incentro en el triángulo rectángulo? Centro

b) ¿En dónde quedó el incentro en el triángulo obtusángulo? Dentro



4 **Comenten si la siguiente afirmación es verdadera y den argumentos para justificar su respuesta:** el incentro de un triángulo siempre queda dentro del triángulo. V.

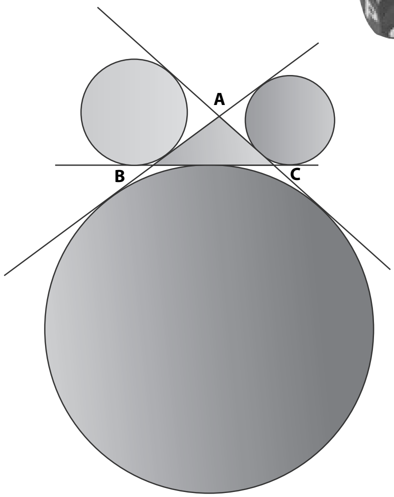


5 **En la siguiente figura aparece el triángulo ABC, al que se le han prolongado los lados, así como tres circunferencias que tocan un lado y las prolongaciones de los otros dos en un solo punto. Esas circunferencias se llaman "exinscritas".**

Averigüen cómo ubicar el centro de cada circunferencia y construyan un triángulo en una hoja de papel, prolonguen sus lados, y tracen con regla y compás las tres circunferencias exinscritas.

(Pista: Recuerden las propiedades de la bisectriz que estudiaron en primer grado).

R. L.



Valoración del desempeño

- Comprender, describir y construir la circunferencia inscrita a un triángulo.
- Comprender, describir y construir las bisectrices de los ángulos de un triángulo.
- Comprender, describir y construir el incentro de un triángulo.

Otros recursos

Puede encontrar más propiedades sobre las bisectrices en la siguiente página electrónica:
http://ficus.pntic.mec.es/dbab0005/triangulos/Geometria/tema2/Rectas%20notables.html#Bisectriz

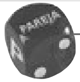
Sugerencias didácticas

Resaltar que el baricentro o centro de gravedad (intersección de las medianas), además de tener propiedades geométricas, tiene una propiedad física muy importante, como su nombre lo indica. Para que el estudiante tome conciencia de esto, el profesor puede pedir que sus alumnos elaboren triángulos de madera y coloquen un lápiz en el baricentro para que se percaten de la veracidad de esta propiedad.

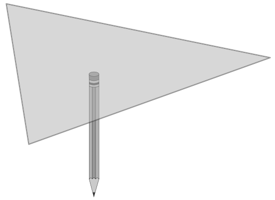
Es interesante y muy estimulante para el alumno explicarle por qué el cetro de gravedad se encuentra ubicado en el baricentro y no en el incentro, por ejemplo. Para esto, el profesor puede invitar al estudiante a hacer una breve investigación en Internet o bibliográfica sobre este hecho.

Lección 79 Centro de gravedad

¿Sabías que los triángulos tienen un "centro de gravedad"? En esta lección aprenderás a localizarlo.

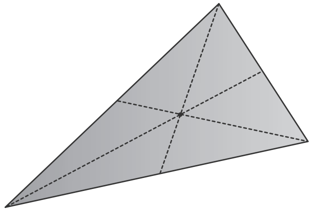


1 **Recorten un triángulo cualquiera en cartón. Intenten encontrar un punto para ponerlo en equilibrio sobre la goma de un lápiz. Cuando encuentren el lugar, márquenlo con un pequeño círculo.**



2 **¿Saben cómo encontrar el punto de equilibrio de manera segura y no al tanteo? Hagan lo siguiente en su triángulo de cartón.**

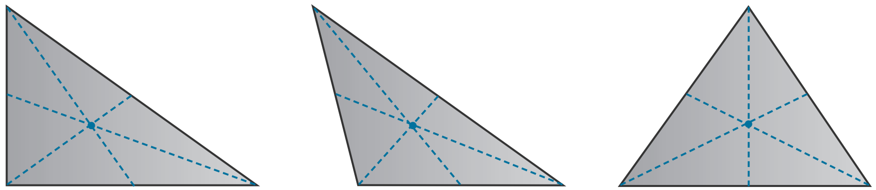
- Localicen el punto medio de cada lado.
- Unan cada vértice con el punto medio de su lado opuesto.
- Verifiquen que los tres segmentos trazados se corten en un punto que llamarán **B**.
- Comprueben que **B** es el punto de equilibrio del triángulo ¿Este punto está cerca del que encontraron antes?



El segmento que une un vértice con el punto medio de su lado opuesto se denomina **mediana**.

El punto donde se cortan las tres medianas de un triángulo se llama **baricentro** o **centro de gravedad**.

3 **Encuentra el baricentro de los siguientes triángulos.**



© ediciones sm

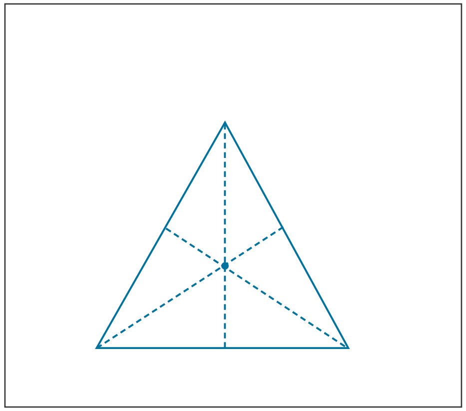
© ediciones sm

4 **Considera la siguiente afirmación:**

Una mediana y una mediatriz de un triángulo nunca coinciden.

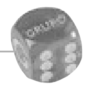
Demuestra con un ejemplo que la afirmación es falsa. Traza el triángulo con su mediana y su mediatriz en el recuadro de la derecha.

Triángulo equilátero



5 **Encuentra la afirmación falsa que se incluye a continuación y demuestra que lo es con un ejemplo.**

Afirmación	Ejemplo
a) El baricentro de un triángulo siempre queda dentro de él.	
b) En un triángulo isósceles con sólo dos lados iguales, las medianas, bisectrices y mediatrices coinciden.	 R. L.
c) En un triángulo equilátero, el baricentro, el circuncentro y el incentro son el mismo punto.	



6 **Comparen sus respuestas con las de sus compañeros y compañeras. Observen que sí existe el triángulo que se pide en la actividad 4. ¿Qué tipo de triángulo es?**

Valoración del desempeño

- Comprender, describir y construir las medianas de los lados de un triángulo.
- Comprender, describir y construir el baricentro de un triángulo.

Otros recursos

Puede encontrar más propiedades sobre las medianas y el baricentro en la siguiente página electrónica:
http://ficus.pntic.mec.es/dbab0005/triangulos/Geometria/tema2/Rectas%20notables.html#Mediana

Sugerencias didácticas

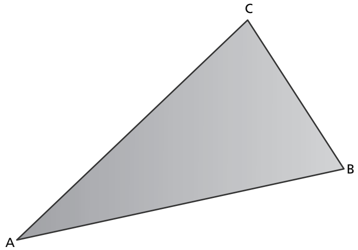
Esta lección, además de plantear la construcción del ortocentro, invita al estudiante a reflexionar sobre las condiciones que deben cumplir las rectas notables (mediatrices, bisectrices, medianas y alturas) para que coincidan o no en un triángulo, y consigue esto a través de una serie de preguntas distribuidas en toda la lección, que sería interesante que comentaran entre los alumnos y el profesor, ya que podrían generar un valioso debate dentro del grupo.

Ahora que se han visto las diferentes rectas notables de un triángulo, el profesor puede pedirle a los estudiantes que en una cartulina grande tracen un triángulo donde no coincidan ninguna de las rectas notables ya mencionadas, y que dibuje cada una de distinto color.

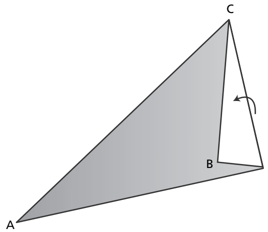
Lección 80 Las alturas del triángulo

¿Cuántas alturas tiene un triángulo? Esta y otras preguntas estudiarás en la presente lección.

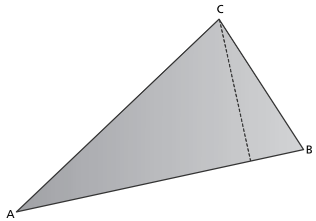
1 **Traza en una hoja un triángulo escaleno y acutángulo y nombra sus vértices A, B y C.**



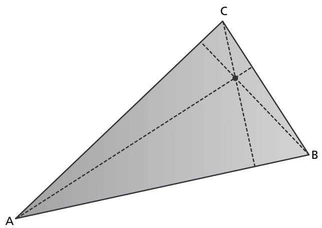
- Dobla el papel de manera que el vértice **B** caiga sobre el lado **AB** y el doblez pase por el punto **C**, como muestra la ilustración de la derecha.



- El doblez marcado es una de las tres alturas del triángulo: la que corresponde al lado **AB**. En el dibujo se indica con una línea punteada.
- Marca con el procedimiento que prefieras las otras dos alturas del triángulo: la que corresponde al lado **AC** y que pasa por el vértice **B**, y la que corresponde al lado **BC** y pasa por el vértice **A**.



- Si hiciste bien los dobleces observarás que las tres alturas se cortan en un punto.



Una altura de un **triángulo** es el segmento perpendicular a un lado o a su prolongación y que pasa por el vértice opuesto a dicho lado.

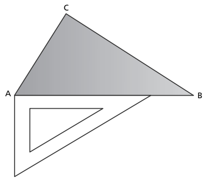
Los triángulos tienen tres alturas que concurren en un punto llamado **ortocentro.**

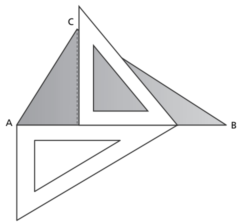
© ediciones sm

© ediciones sm

2 **El siguiente es un procedimiento para trazar con escuadras una de las alturas de del triángulo.**

Coloca una escuadra sobre uno de los lados del triángulo.	Coloca la otra escuadra de manera que forme un ángulo recto con la anterior y que pase por el vértice opuesto. Traza la altura.





3 **Traza en tu cuaderno un triángulo en el que:**

a) El ortocentro sea uno de sus vértices.

b) El ortocentro quede fuera del triángulo.

¿Cómo es el triángulo en el que el ortocentro es uno de sus vértices? Triángulo rectángulo

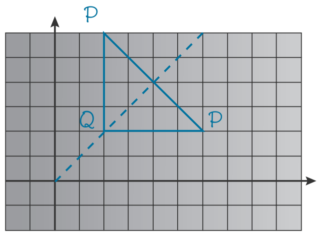
¿Cómo es el triángulo en el que el ortocentro queda fuera del triángulo? Triángulo octusángulo

4 **Traza en tu cuaderno un triángulo en el que:**

a) Una de sus alturas también sea una de sus mediatrices.

b) Dos de sus alturas coincidan con dos de sus lados.

5 **Localiza en el plano cartesiano los puntos P(2, 6), Q(2, 2) y R(6, 2). Une los puntos para formar un triángulo.**



a) ¿Cuáles son las coordenadas de su ortocentro?

(2, 2) ,

¿y las de su circuncentro? (4, 4)

b) Une el ortocentro y el circuncentro con una línea y prolóngala. ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por estos dos puntos? **y** = x

6 **Comparen sus respuestas a los ejercicios 3, 4 y 5. Comenten si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas, y con argumentos justifiquen su respuesta.**

- *La altura de un triángulo siempre es menor o igual que la mediana que corresponde al mismo lado.* Verdadero
- *Cualquiera de las alturas de un triángulo siempre es menor que uno de sus lados.* Falso

TECNOLOGÍA

7 **Resuelve el anexo 4 (páginas 242 y 243).**

© ediciones sm

Valoración del desempeño

- Comprender, describir y construir las alturas de los lados de un triángulo.
- Comprender, describir y construir el ortocentro de un triángulo.

Otros recursos

Puede encontrar más propiedades sobre las alturas y el ortocentro en la siguiente página electrónica:
http://ficus.pntic.mec.es/dbab0005/triangulos/Geometria/tema2/Rectas%20notables.html#Mediana

© ediciones sm

Sugerencias didácticas

Pida a los alumnos que lleven dados y monedas para que puedan hacer la formulación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos, y para que hagan su comprobación mediante la realización de experiencias repetidas, de manera que los resultados obtenidos se comenten con el profesor.

Sugerimos que se haga un reconocimiento y valoración de la utilidad de las matemáticas para interpretar y describir situaciones inciertas, con el objetivo de que el alumno sea capaz de resolver problemáticas relativas a predicciones mediante el uso e interpretación de gráficas estadísticas como la del ejercicio 3, por ejemplo.

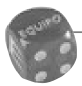
Debemos cerciorarnos de que al alumno le quede claro por qué la probabilidad de que un evento ocurra más la probabilidad que no ocurra es siempre igual a 1.

Lección 81 ¿Lloverá o no lloverá?

Usualmente en un experimento de azar se pregunta por la probabilidad de que un evento ocurra, sin embargo, también puede preguntarse, ¿cuál es la probabilidad de que el evento no ocurra?

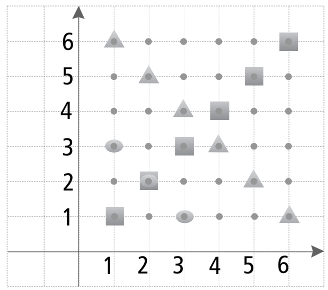
1 **En la siguiente tabla se describen varios eventos, anota lo que falta en la segunda y tercera columnas.**

Eventos	Probabilidad de que ocurra	Probabilidad de que no ocurra
A: Caer seis al lanzar un dado.	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$
B: Caer águila al lanzar una moneda.	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
C: Caer número par al girar una ruleta dividida en 10 partes iguales numeradas del 0 al 9.	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
D: Acertar en un reactivo de 4 opciones de las cuales sólo una es correcta, cuando se contesta al azar.	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
E: Caer dos números iguales al lanzar dos dados.	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$



2 **Compara tus respuestas con las de tus compañeros de equipo; si hay diferencias, averigüen entre todos quién tiene razón.**

3 **En el siguiente esquema se puede apreciar el espacio muestral del experimento que consiste en lanzar dos dados. Además, hay una fila de triángulos, una de rectángulos y otra de óvalos, que señalan, respectivamente, los espacios muestrales de tres eventos, A, B y C.**



a) Describe los eventos A, B y C.

A: La suma de las caras es 7

B: La cara de los dados sea impar y sumen 4.

C: La suma de las caras sea par.

© ediciones sm

© ediciones sm

b) Completa la siguiente tabla.

Probabilidad de que ocurra		Probabilidad de que no ocurra	
A =	6/36	A =	30/36
B =	2/36	B =	34/36
C =	6/36	C =	30/36

4 **Con ayuda de su profesor o profesora, comparen sus resultados con los de otros equipos.**

5 **Lee la siguiente información.**

Seguramente ya has notado que la probabilidad de que un evento ocurra, más la probabilidad de que ese mismo evento **NO** ocurra, es igual a **uno**. Por ejemplo, la probabilidad del evento M: "Salir 5 al lanzar un dado" es $\frac{1}{6}$, mientras que la probabilidad del evento N: "No salir 5 al lanzar un dado" es $\frac{5}{6}$. A estos dos eventos se les llama complementarios y la suma de sus probabilidades es uno.

De manera abreviada la probabilidad de un evento M se expresa así: P(M)

La probabilidad del complemento de M se expresa así: $P(M^c)$

De manera que, en este caso, $P(M) = \frac{1}{6}$; $P(M^c) = 1 - P(M) = \frac{5}{6}$

6 **Con base en los siguientes eventos, calculen las probabilidades que se piden.**

A: Al lanzar un dado se obtiene número par.
B: Al lanzar dos dados, la suma de los números que aparecen es un número impar.
C: Al lanzar dos dados, la suma de los números que aparecen es 10.
D: Al sacar una bola de una bolsa que contiene tres bolas negras y dos rojas, sale bola negra.

$P(A) = \frac{1}{2}$ $\quad P(A^c) = \frac{1}{2}$

$P(B) = \frac{1}{2}$ $\quad P(B^c) = \frac{1}{2}$

$P(C) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ $\quad P(C^c) = \frac{11}{12}$

$P(D) = \frac{3}{5}$ $\quad P(D^c) = \frac{2}{5}$

7 **Con ayuda de su profesor o profesora, comparen sus respuestas al problema anterior. Si hay diferencias, intercambien opiniones hasta que se pongan de acuerdo. Verifiquen que la suma de la probabilidad de un evento con la de su complemento sea igual a uno.**

© ediciones sm

Valoración del desempeño

- Poder expresar en un lenguaje matemático las probabilidades de que un evento ocurra.
- Aprender que la probabilidad de un evento más su complemento (probabilidad total) es igual a 1.

Otros recursos

Para apoyar el estudio de la probabilidad y sus conceptos a un nivel básico, recomendamos visite el siguiente sitio de Internet http://www.uaq.mx/matematicas/estadisticas/xu4.html

© ediciones sm

Sugerencias didácticas

Esta lección es propicia para que lúdicamente (mediante la elaboración de una ruleta grande en la que todo el grupo pueda jugar) el profesor recuerde al estudiante que la probabilidad de que un evento ocurra se calcula mediante la siguiente fórmula:

P(E) = Eventos favorables / Eventos posibles

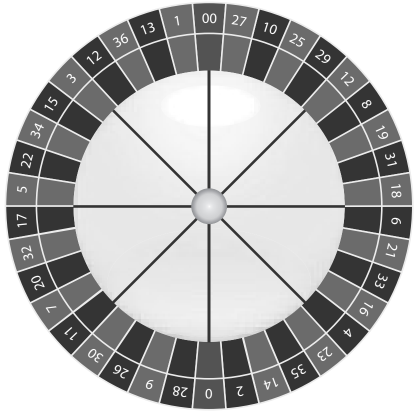
Donde E es el evento.

Con la ruleta elaborada por los alumnos, el profesor puede hacer hincapié en el cálculo de los eventos compuestos, ya sean dobles (dos eventos validos al mismo tiempo) o mutuamente excluyentes (que sólo uno sea posible).

Otro ejercicio en el que los alumnos pueden practicar lo aprendido es verter en una bolsa negra papeles numerados de diferentes colores y preguntarles la probabilidad, por ejemplo, de que salga un papel azul con un número impar.

Lección 82 La ruleta

Un juego de azar muy conocido es la ruleta. Se trata de un círculo dividido en partes iguales, coloreadas y con números.



1 **Los jugadores de la ruleta pueden colocar apuestas de varias maneras, pueden apostar a números individuales o conjuntos de números. Anota al menos tres eventos diferentes a los que se puede apostar.**

Evento **A**: Color rojo

Evento **B**: Números impares

Evento **C**: Números pares

2 **En una jugada, la ruleta se detuvo en el número 6 y un jugador ganó. Anota al menos dos eventos distintos a los que este jugador pudo haber apostado.**

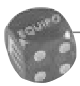
Evento **D**: Números pares

Evento **E**: Color negro

3 **Un jugador apostó al número 6. ¿Cuál es la probabilidad de que gane?** $\frac{1}{38}$

4 **Otro jugador apostó a los casilleros negros. ¿Cuál es la probabilidad de que gane?**

$\frac{18}{38}$



5 **Reúnanse en equipo y comparen sus respuestas a los problemas anteriores. Si hay diferencias, averigüen quiénes tienen razón.**

© ediciones sm

© ediciones sm

6 **Averigüen juntos la probabilidad de los eventos anotados en la siguiente tabla.**

Eventos	Probabilidad
A: La ruleta se detiene en color verde.	0
B: La ruleta se detiene en color rojo.	$\frac{20}{38}$
C: La ruleta se detiene en color negro.	$\frac{18}{38}$
D: La ruleta se detiene en número par.	$\frac{20}{38}$
E: La ruleta se detiene en número impar.	$\frac{18}{38}$
F: La ruleta se detiene en el número 15.	$\frac{1}{38}$

7 **Con ayuda de su profesor o profesora analicen la siguiente información.**

Un evento puede ser la composición de dos o más eventos. Por ejemplo:

El evento **A** o **B** ocurre cuando la ruleta se detiene en color verde o cuando se detiene en color rojo.

El evento **B** y **D** ocurre cuando la ruleta se detiene en color rojo y a la vez en un número par.

A este tipo de eventos se les llama **compuestos**.

Los eventos complementarios estudiados en la lección anterior, también son eventos compuestos.

8 **Anoten los datos que hacen falta en la siguiente tabla.**

Eventos compuestos	Espacios muestrales	Probabilidad
A o **B**	{00, 0, 1, 3, 5, 7, 9, 12, 14, 16, 18, 19, 21, 23, 25, 27, 30, 32, 34, 36}	
B o **C**		
A o **B** o **C**		
B y **D**	{12, 14, 16, 18, 30, 32, 34, 36}	
C y **E**		
E y **F**		

9 **En uno de los eventos compuestos de la tabla anterior la probabilidad es igual a 1. ¿Qué significa este resultado?** ______________________

____

10 **Con ayuda de su profesor o profesora, comparen los resultados obtenidos en los problemas 8 y 9.**

© ediciones sm®

Valoración del desempeño

- Practicar el cálculo de probabilidades sencillas y de probabilidades compuestas.
- Hacer predicciones sobre la posibilidad de que un suceso ocurra a partir de información

Otros recursos

Para practicar el cálculo de probabilidades sencillas y de probabilidades compuestas,
recomendamos visite el siguiente
http://www.uaq.mx/matematicas/estadisticas/xu4.html

© ediciones sm®

Sugerencias didácticas

Es buen momento para que el profesor defina de manera formal *un espacio muestral* como el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento, de manera que el estudiante logre distinguir los eventos compuestos y pueda hacer diagramas en los que se visualicen las intersecciones entre los eventos.

Es de suma importancia que el profesor se cerciore de que no hay confusión acerca de los cálculos que el alumno debe hacer para encontrar probabilidades de eventos compuestos, por ejemplo, puede escribir en el pizarrón en forma de ecuación:

$$\mathbf{P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)}$$

Donde **P** es la probabilidad de que un evento ocurra.

Lección 83 Otra vez el dado

¿Qué tanto sabes acerca del experimento de lanzar un dado, además de que es un experimento de azar?

1 **En relación con el experimento de lanzar un dado, anota el *espacio muestral* de cada uno de los siguientes eventos.**

a) Evento **A**: caer número par 2, 4, 6

b) Evento **B**: caer número impar 1, 3, 5

c) Evento **C**: caer número menor o igual que 3 1, 2, 3

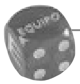
d) Evento **D**: caer 5 5

e) Evento compuesto **A** o **B** 1, 2, 3, 4, 5, 6

f) Evento compuesto **B** o **C** 1, 2, 3, 5

g) Evento compuesto **B** y **C** 1, 3

h) Evento compuesto **C** y **D** —



2 **Reúnete con tus compañeros de equipo y comparen sus respuestas; si hay diferencias, averigüen quién tiene la razón.**

3 **Con base en las respuestas encontradas en el problema 1, anoten lo que se pide a continuación.**

a) Un evento seguro, puesto que su probabilidad es 1: A o B

b) Un evento imposible, puesto que su probabilidad es 0: A y D

c) Un evento cuya probabilidad es $\frac{1}{6}$: D

d) Un evento compuesto por dos eventos que tienen elementos comunes:

B y D

e) Un evento compuesto por dos eventos que no tienen elementos comunes:

C y D

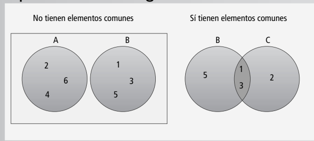
4 **Comparen las respuestas del problema anterior con ayuda de su profesor o profesora.**

© ediciones sm

© ediciones sm

5 **Lee la siguiente información.**

Dos o más eventos que no tienen elementos comunes se llaman **mutuamente excluyentes**. Por ejemplo el evento **A** y el evento **B** no tienen elementos comunes, mientras que el evento **B** y el evento **C** sí tienen elementos comunes. Gráficamente estas relaciones se pueden representar de la siguiente manera.



Los elementos comunes son la intersección entre los eventos. En el primer caso no hay intersección, mientras que en el segundo caso la intersección son los sucesos simples {1, 3}.

6 **Entre todos, busquen argumentos para justificar la veracidad de los siguientes enunciados.**

a) La probabilidad del evento **A** o **B**, es igual a la probabilidad de **A**, más la probabilidad de **B**, porque:

Al no tener elementos en común

uno complementa al otro

b) La probabilidad del evento **B** o **C** es igual a la probabilidad de **B** más la probabilidad de **C**, menos la probabilidad de la intersección entre **B** y **C**, porque:

No son mutuamente excluyentes

por completo

c) La probabilidad del evento **A** y **B** es igual a cero, porque:

Son mutuamente excluyentes

d) La probabilidad del evento **B** y **C** es igual a $\frac{2}{6}$, porque:

Contiene 2 de 6 elementos

7 **Con ayuda de su profesor o profesora, hagan lo siguiente:**

a) Anoten en el pizarrón lo que escribieron los equipos en el enunciado 6a.
b) Si los argumentos de este enunciado son contradictorios, traten de ponerse de acuerdo.
c) Continúen con la revisión de los demás enunciados.

© ediciones sm

Valoración del desempeño

- Cálculo de la probabilidad de eventos compuestos que tengan o no elementos en común.
- Poder expresar con diagramas de Ven los espacios muestrales de probabilidades compuestas.

Otros recursos

Si desea calcular la probabilidad de eventos compuestos que tengan o no elementos en común, puede encontrar ejercicios en el siguiente sitio: http://www.uaq.mx/matematicas/estadisticas/xu4.html

© ediciones sm

Sugerencias didácticas

En esta lección es conveniente que el profesor estimule en el alumno la interpretación y lectura de tablas de valores y gráficas relacionadas con fenómenos naturales, sociales, de la vida cotidiana, o bien del mundo de la información.

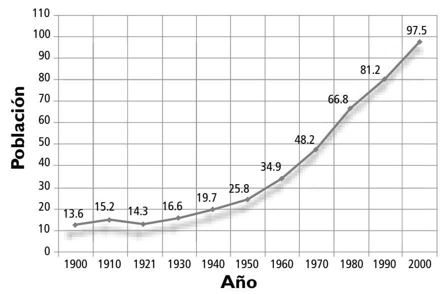
Puede pedir a los estudiantes que lleven la sección financiera de algunos periódicos donde se encuentren algunas gráficas, y que, de manera grupal, puedan distinguir las diferencias entre los distintos tipos de gráficas y elijan parámetros, o bien el tipo de gráfica que interprete mejor determinado fenómeno, para esto el ejercicio 4 es muy enriquecedor.

Lección 84 Día Mundial de la Población

Conocerás aquí un tipo de gráfica parecida al polígono de frecuencias cuya principal característica es que muestra datos que varían con el tiempo.

1 **Con motivo del Día Mundial de la Población,[1] el 11 de julio, el INEGI publicó en 2003 los siguientes datos[2]**

Población total de México (millones) 1900-2000



a) ¿Cuál de las siguientes es otra manera de escribir 34.9 millones?

3 490   34 900   3 490 000   34 900 000

b) ¿Cuántos habitantes aumentó la población en 1990 con respecto a 1980? 14.4

c) ¿Cuántas veces, aproximadamente, creció la población de 1940 al año 2000? 5 veces

d) ¿En qué año la población se incrementó más con respecto al censo anterior? 1980

e) ¿En qué año hubo una disminución de la población con respecto al censo anterior?

1921 ¿A qué consideras que se debe esta disminución? A la mortandad ocasionada por la Revolución Mexicana.

La gráfica anterior se llama **gráfica de línea**. Su principal característica es que presenta la evolución de datos a través del tiempo, en este caso, cada 10 años.

Es diferente del polígono de frecuencias, porque los valores del eje horizontal no son puntos medios de intervalos y no se cierra.

Es diferente a las gráficas del plano cartesiano porque nada podemos afirmar de lo que sucede entre un periodo de tiempo y otro, sólo se pueden hacer suposiciones. Además, no es necesario iniciar con el tiempo cero, sino a partir del tiempo en que se tiene el primer dato registrado.

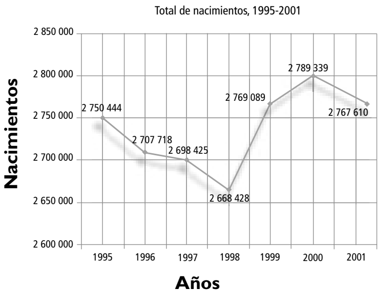
[1] Se estima que fue el 11 de julio de 1987 cuando la población mundial alcanzó la cifra de 5 000 millones de personas. A partir de esa fecha, y a iniciativa de la ONU, se celebra el Día Mundial de la Población.

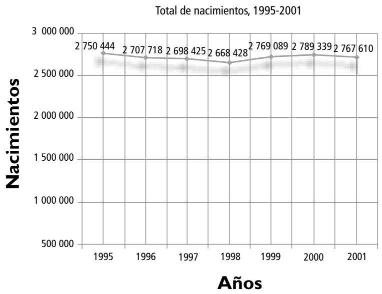
[2] Fuente: www.sep.gob.mx/work/resources/LocalContent/15105/1/2003%20pOBLACION.pdf

© ediciones sm

© ediciones sm

2 **Las siguientes dos gráficas de línea representan exactamente los mismos datos.**





a) ¿Por qué se ven diferentes? Se utiliza diferente escala en el eje que representa a los nacimientos

b) ¿Cuál consideras que da una mejor idea de cómo varía el número de nacimientos? La primera gráfica, ¿por qué lo consideras así? Se señalarían claramente las variaciones

c) Completa la tabla, expresa los datos tomando como unidad el millón y redondea a una décima.

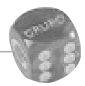
Año	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Nacimientos (en millones)	2.8	2.7	2.7	2.7	2.8	2.8	2.8

d) En la gráfica de la página anterior los datos están en millones (81.2 millones), en las gráficas de esta página los datos están en unidades simples (2 750 444). ¿Cuáles crees que son más exactos?

Los que están en unidades. ¿Por qué?

Son los más exactos.

¿Cuál es la ventaja de usar como unidad a los millones? Manejo de cifras.



3 **Compara tus respuestas y opiniones con las de otros compañeros y compañeras de grupo.**

4 **Haz lo siguiente.**

a) Busca en periódicos, libros, revistas o internet gráficas de línea, por ejemplo, registros de temperatura, de lluvia, de niveles de ozono en el aire, cotización del dólar o del euro.
b) Analiza las gráficas, es decir, ve qué información proporcionan, qué significan los puntos bajos o los altos, cuál es el rango de valores de los datos de cada eje, etc.

© ediciones sm

Valoración del desempeño

- Conocer diferentes formas de recoger información.
- Organizar en tablas de datos la información recogida en una experiencia.
- Interpretar gráficas de líneas.

Otros recursos

Para apoyar la interpretación de gráficas de diferentes fenómenos, visite el siguiente sitio:
http://www.fisterra.com/mbe/investiga/graficos/graficos.asp

© ediciones sm

Sugerencias didácticas

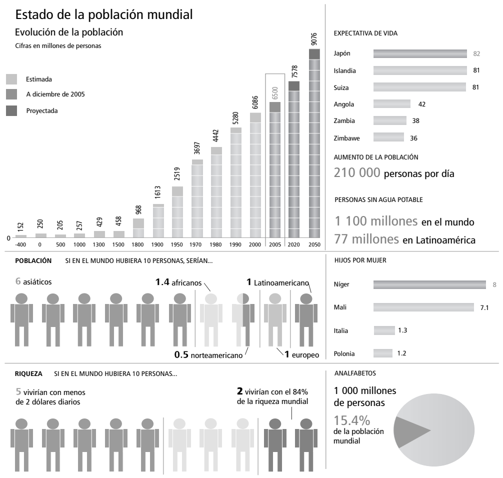
Mediante una lluvia de ideas el profesor, junto con los estudiantes, puede llegar a diferentes conclusiones acerca de los beneficios que tiene presentar un conjunto de datos de manera gráfica, además de hacer más sencilla su interpretación.

Un ejercicio que recomendamos es pedirle al alumno que analice si es posible o no trasformar diversas gráficas en otras, por ejemplo, ¿una gráfica de barras puede ser transformada en una de líneas sin alterar su información? Si es así, pídales que lo hagan.

Lección 85 El mundo en gráficas

Existe una gran diversidad de formas de presentar gráficamente la información. El objetivo siempre es transmitir de la manera más clara posible lo que se considera importante.

1 Considera la siguiente información[1]



a) ¿Qué porcentaje de la población mundial es asiática?

60% Cuidado, la respuesta no es "6".

b) ¿Qué porcentaje de la población mundial es latinoamericana? 10%

c) ¿Qué porcentaje vive con menos de dos dólares diarios? 50%

d) ¿Cuántas personas nacen en un año?

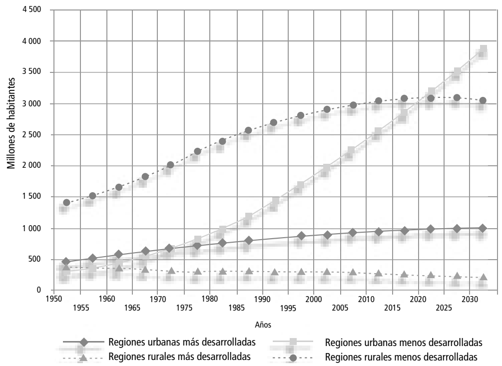
76 650 000

e) ¿Cuál de los datos de la gráfica, entre otros, sirve para hacer un cálculo aproximado de la población en los años 2020 y 2050?

La que indica el estado de la población mundial

f) ¿Qué porcentaje de la población en Latinoamérica no cuenta con agua potable?

11.8%



2 La gráfica de líneas[2] **muestra la evolución de la población urbana y rural en el mundo, en millones de habitantes.**

- Redacta en tu cuaderno un breve texto sobre la situación que muestra la gráfica.

R. L.

[1]Fuente: www.clarin.com/diario/2005/06/24/thumb/info34.jpg

[2]www.iigov.org/dhial/?p=7_07

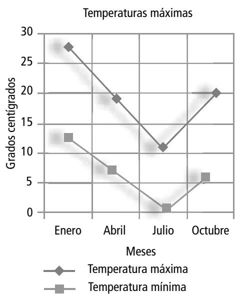
© ediciones sm

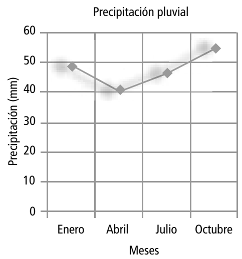
© ediciones sm

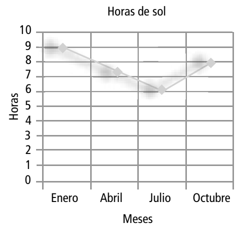
3 **Canberra es la capital de Australia. Considerando la información de las siguientes gráficas, responde las preguntas.**

a) ¿En qué época del año te gustaría visitar esta ciudad? R. L.

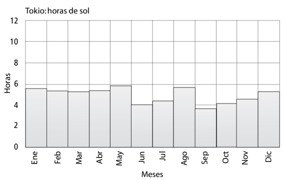
b) ¿Por qué? R. L.

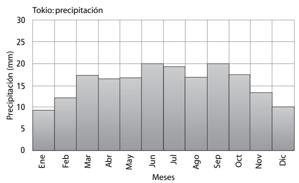


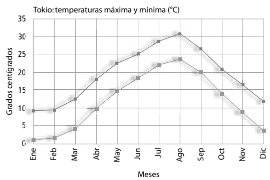


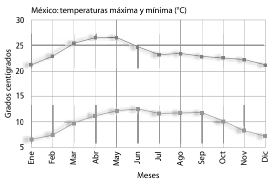


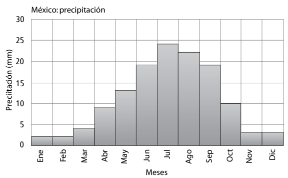
4 **Las siguientes gráficas muestran algunos aspectos del clima de Tokio (capital de Japón) y de la ciudad de México. Haz una comparación y redacta en tu cuaderno cuáles son las semejanzas y diferencias que encontraste con respecto a las temperaturas, días de lluvia y horas de sol al día.**

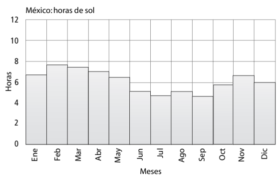












5 **Compara los textos de los ejercicios 2 y 4 con los que escribieron otros compañeros.**

Fuente: http://es.allmetsat.com/clima/norteamerica.php

© ediciones sm

Valoración del desempeño

- Aprender a interpretar diferentes tipos de gráficas como la de barras, líneas o sectores, por ejemplo.
- Ser capaz de analizar los aspectos más destacables de los gráficos estadísticos.
- Estudio y comparación de fenómenos estadísticos a través de sus gráficas.

Otros recursos

Una página de análisis de los distintos tipos de gráficas es la siguiente: http://www.fisterra.com/mbe/investiga/graficos/graficos.asp

© ediciones sm

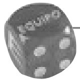
Sugerencias didácticas

La interpretación de un fenómeno a través de una gráfica suele ser un tema que confunde a los estudiantes por la diversidad de gráficas que existen y que expresan diferentes tipos de crecimiento o decrecimiento; por lo tanto, se sugiere que dialogue con sus alumnos por qué piensan que la gráfica del ejercicio 1 sea lineal, o bien sobre lo que ocurre con la altura de agua del recipiente cada vez que vierte una taza de agua en él.

Una observación importante que el profesor no debe dejar pasar, es que la relación que existe entre el nivel de agua de un recipiente cilíndrico y las tazas de agua vertidas en él es proporcional, es decir que si se duplica el numero de tazas de agua vertida, también la altura de agua del recipiente se duplicará, o sea que el crecimiento tiene una razón constante. Sin embargo, si el recipiente no tiene forma cilíndrica, esta proporción no tiene porque ser constante.

Lección 86 Llenado de botellas

La altura que alcanza un líquido en un recipiente, varía en función de la cantidad de líquido vertido y… de algo más ¿Sabes qué es ese algo más?

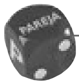


1 **Resuelvan la siguiente actividad en equipos. Necesitarán el siguiente material:**

- Un recipiente transparente en el que se pueda verter agua. Procuren que los recipientes del grupo tengan formas distintas, por ejemplo, una botella de refresco, un bote de jabón, etc.
- Un embudo para introducir agua al recipiente.
- Un recipiente pequeño, por ejemplo, un botecito de yogurt, una tacita, etc.
- Una cubeta para sacar de ahí el agua que necesitarán.
- Una regla graduada o una cinta métrica.

a) Viertan el líquido en el recipiente grande con el recipiente pequeño bien lleno varias veces, hasta casi llenar el grande.
b) Cada vez que viertan el recipiente pequeño, registren la altura que alcanza el agua en su recipiente grande.
c) Al terminar, hagan en sus cuadernos una gráfica que relacione el número de recipientes pequeños vertidos (eje de las abscisas) con la altura, en centímetros, que alcanza el líquido en el recipiente grande (eje de las ordenadas).

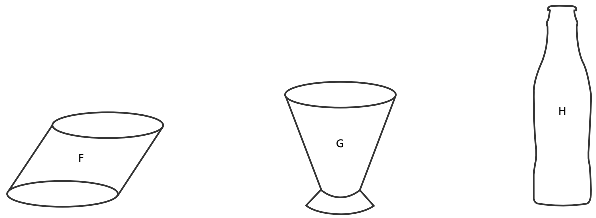
2 **Con ayuda de su profesor o profesora, comparen sus gráficas con las de otros equipos. Analicen la relación que hay entre la forma de cada gráfica con la forma del recipiente grande.**



3 **Si se graficara la relación "número de tazas vertidas-altura del agua" para cada uno de los siguientes recipientes, ¿qué gráfica sería una línea recta?**

La del recipiente **F** ✓ ________ La del recipiente **G** ________

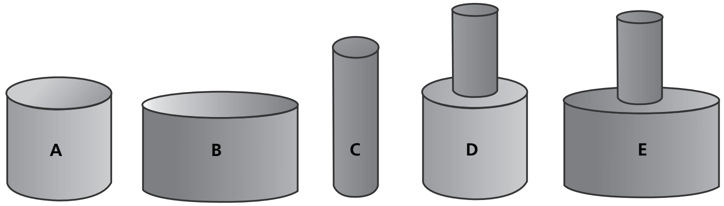
La del recipiente **H** ________ Ninguna ________ Las tres ________



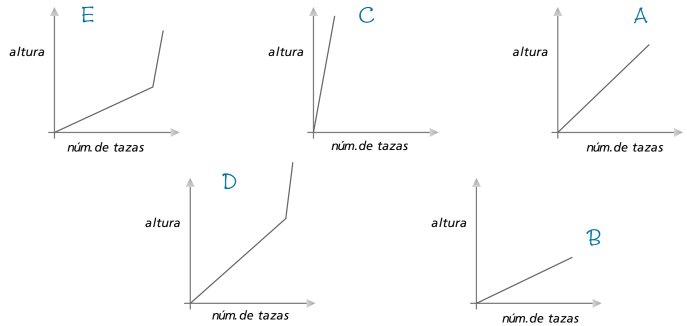
© ediciones sm

© ediciones sm

4 **Cada uno de los siguientes recipientes se llenó vertiendo agua con una pequeña taza.**



Para cada recipiente se hizo una gráfica que relaciona la cantidad de tazas vertidas con la altura que alcanza el líquido. Averigüen qué gráfica corresponde a cada recipiente.



5 **Comparen sus resultados. Expliquen a los demás el porqué de sus elecciones.**

6 **Los datos de las tablas corresponden a dos recipientes en los que se vertieron tazas de agua y se fue midiendo la altura del líquido.**

Tabla 1	
Cantidad de líquido (tazas)	Altura del líquido (cm)
1	4
2	8
3	12
4	20
5	28

Tabla 2	
Cantidad de líquido (tazas)	Altura del líquido (cm)
1	5
2	10
3	15
4	20
5	25

En su cuaderno:

a) Tracen la gráfica de cada tabla.

b) Dibujen la forma que creen que tiene cada recipiente.

7 **Comparen sus resultados con los de sus compañeros y compañeras de grupo; expliquen cómo llegaron a ellos.**

© ediciones sm

Valoración del desempeño

- Identificación de relaciones de proporcionalidad directa a partir del análisis de su tabla de valores o de su gráfica.
- Interpretación de diferentes tipos de gráficas lineales.

© ediciones sm

Sugerencias didácticas

Es importante que el profesor mencione a los alumnos que ahora la dinámica de la lección ha cambiado, es decir, ahora a partir de una gráfica dada deben extraer información, de manera que sean capaces de reconstruir un acontecimiento partiendo únicamente de su graficación.

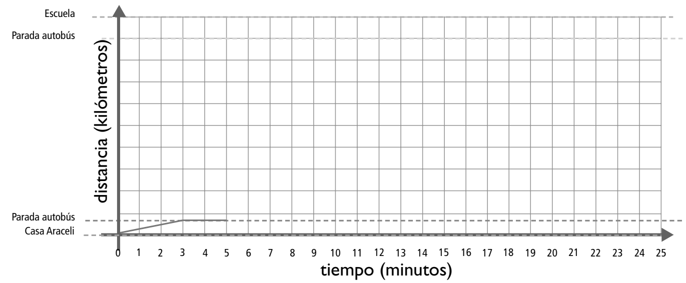
Esto es muy formativo para los alumnos, ya que estimula enormemente su abstracción matemática.

Lección 87 El movimiento en gráficas

Un auto va a una velocidad constante durante cierto tiempo, luego se detiene durante un tiempo y después continúa pero a otra velocidad, ¿cómo se grafica esta situación?

1 Para ir a su escuela, que está a 5 km de su casa, Araceli caminó hasta la parada de autobús y ahí esperó. El trayecto en el autobús duró 15 minutos y, al bajar, Araceli caminó otros 5 minutos hasta llegar a la escuela.

La siguiente gráfica muestra la primera parte del recorrido de Araceli, desde que salió de su casa hasta que se subió al autobús.



a) ¿Cuánto tiempo le tomó a Araceli caminar de su casa a la parada del autobús? 3 minutos

b) ¿Cuánto esperó al autobús? 2 minutos

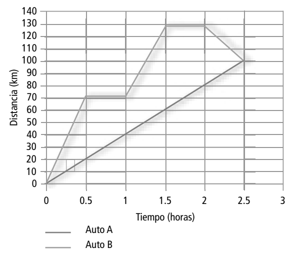
c) Completa la gráfica del trayecto de Araceli.

d) Aproximadamente, ¿cuál es la distancia entre la casa de Araceli y la parada donde abordó el autobús? 800 m

e) Aproximadamente, ¿qué distancia recorrió en autobús? 3 200 m

f) Si Araceli salió de su casa a las 6:55 de la mañana, ¿a qué hora llegó a la escuela? 7:20

2 Dos autos parten del mismo lugar y en la misma dirección. Las gráficas que se muestran relacionan, para cada auto, el tiempo de recorrido con la distancia que lo separa del punto de salida.



© ediciones sm

© ediciones sm

a) ¿Hubo algún momento en el que el auto **A** aumentara su velocidad? No

Si tu respuesta es afirmativa, indica cuál fue ese momento: ______

b) ¿Qué auto se detuvo en dos ocasiones? B ¿Cuánto tiempo estuvo parado en total? 1 hora ¿A qué distancia del origen se paró la primera vez? A 70 km

¿Y la segunda? A 130 km

c) ¿Se encontraron los autos? No se sabe Explica cómo lo sabes: Sólo se le puede decir que terminaron a la misma distancia del origen

d) ¿Qué auto se alejó más del punto de salida? B

¿A qué distancia estuvo? Hasta 130 km

e) ¿Uno de los autos mantuvo una velocidad constante. ¿Cuál fue esa velocidad? 40 km/h

f) Si ambos salieron a las 14:30, ¿a qué hora el auto **B** estaba a 30 km del punto de partida?

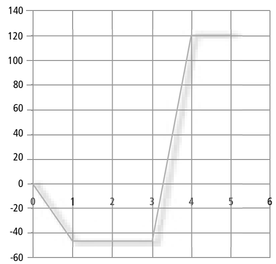
15:15

g) ¿Cuál era la velocidad del auto **A** entre las 2:00 y 2:30 horas después de que salieron?

40 km/h

3 **Compara tus resultados con otros compañeros y compañeras.**

4 **Inventen una historia que corresponda a la gráfica que se muestra.**



R. L.

5 **Ahora ustedes inventen la gráfica y la historia.**

6 **Compara tus historias con las de tus compañeros.**

Interpretación de gráficas

Valoración del desempeño

- A partir de una gráfica dada, extraer información y reconstruir el acontecimiento, es decir, lectura e interpretación de relaciones dadas por gráficas.

Otros recursos

Puede encontrar ejemplos de gráficas muy interesantes ligadas a la vida cotidiana del alumno en el siguiente sitio:
http://www.fisterra.com/mbe/investiga/graficos/graficos.asp

Sugerencias didácticas

Este repaso le permitirá al docente evaluar el manejo que tienen los estudiantes de los siguientes conceptos:

- Operaciones con potencias
- Notación científica
- Criterios de congruencia de triángulos
- Propiedades de las rectas notables de los triángulos
- Interpretación de gráficas

Repasemos lo aprendido

I. Subraya la respuesta correcta

1 **¿A cuánto equivale $5^3 \times 5^5$?**

a) 5^{15} b) 5^2 c) 5^8 d) 15×25

2 **¿Cuál es el resultado de $\frac{4^5}{4^6}$?**

a) 4 b) $\frac{1}{4}$ c) 4^{11} d) $\frac{20}{24}$

3 **Según las teorías científicas nuestro universo se formó hace aproximadamente 1.5×10^{10} años. ¿Qué opción indica esta cantidad?**

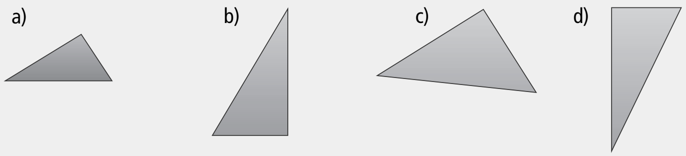
a) 150 millones de años. b) 1500 millones de años.
c) 15 mil millones de años. d) 150 mil millones de años.

4 **El virus de la fiebre amarilla tiene un diámetro promedio de 2×10^{-5} milímetros. ¿Cuál de las siguientes es otra manera de escribir esta medida?**

a) 0.2 mm b) 0.002 mm c) 0.00002 mm d) 0.000002 mm

5 **¿Cuál de los triángulos que aparecen abajo es congruente con el siguiente?**

Ninguno



6 **¿En cuál de los siguientes casos podemos asegurar que dos triángulos son congruentes?**

a) Si tienen sus tres ángulos iguales. b) Si tienen sus tres lados proporcionales.
c) Si tienen al menos dos ángulos iguales. d) Si tienen sus tres lados iguales.

© ediciones sm

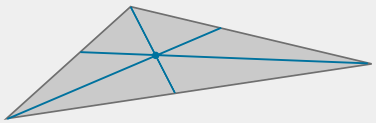
© ediciones sm

7 **Se lanza una moneda dos veces, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?**

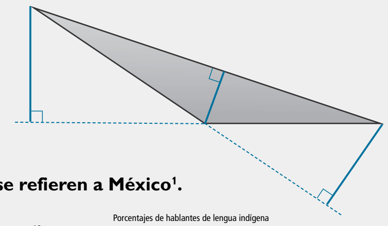
a) Si primero cayó sol, es menos probable que en el segundo lanzamiento caiga águila.
b) Si primero cayó sol, es menos probable que en el segundo lanzamiento también caiga sol.
c) Si primero cayó águila, esto no influye para lo que va a caer en el segundo lanzamiento.
d) Si primero cayó águila, casi es seguro que en el segundo lanzamiento caiga sol.

II. Haz lo que se te indica.

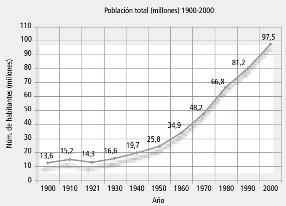
1 **Encuentra el centro de gravedad del siguiente triángulo.**

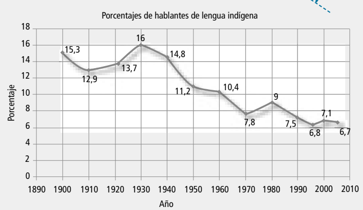


2 **Traza las tres alturas de este triángulo.**



3 **Considera las siguientes gráficas, que se refieren a México[1].**





a) ¿En qué año había más habitantes que hablaban lengua indígena, en 1950 o en el año 2000?

En 1950

b) Completa la tabla y verifica tu respuesta anterior.

	Población total (en millones)	Porcentaje de hablantes de lengua indígena	Población hablante de lengua indígena (en millones)
1950	25.8	11.2	2.9
2000	97.5	6.7	6.9

[1]Fuente: www.inegi.gob.mx/est/default.asp?c=124

© ediciones sm

Valoración del desempeño

- Ser capaz de manejar con fluidez los conceptos anteriores

Otros recursos

En el siguiente sitio, usted encontrará más ejercicios relacionados con los temas vistos en este bloque:
http://www.fermatsi.org/Lecciones.htm

© ediciones sm

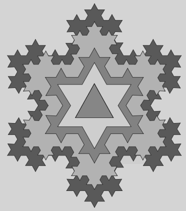
Sugerencias didácticas

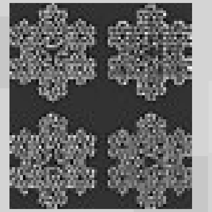
Además de invitarlos a construir sus propios fractales, el docente puede mencionar la importancia que tienen estos objetos matemáticos, ya que al tener un área finita y un perímetro infinito, rompen col muchas nociones geométricas clásicas que se creían ciertas y eran erróneas; de hecho el concepto de fractal forma parte de la matemática moderna, también puede aprovechar este momento para hacer alusión al título del libro y explicar su origen.

Finalmente puede pedirles que investiguen si existen en la naturaleza objetos que tengan forma de fractales.

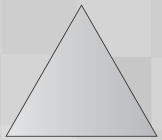
Las matemáticas en el infinito

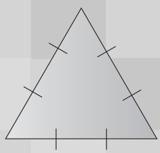
¿Te gustaría dibujar copos de nieve como éstos?

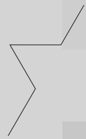




A continuación vas a dibujar uno:







a) Primero dibuja en una hoja un triángulo equilátero; hazlo bastante grande, 18 cm por lado es un buen tamaño

b) Después divide en tres partes iguales cada uno de sus lados

c) En cada lado, substituye el segmento central, por dos segmentos de tamaño idéntico a él, como se indica.

¿Cuál es el perímetro del triángulo inicial? 54 cm

¿Cuál es el perímetro de la figura que te quedó? Puedes usar fracciones o decimales.

72 cm

Esto es sólo el inicio, continuemos. Se trata de repetir los pasos de b) **y** c) **anteriores con cada uno de los doce segmentos de la figura que te quedó:**

- **Divide cada uno de los segmentos en tres partes iguales.**
- **Sustituye el segmento central por dos de tamaño idéntico a él; de esta forma: .**
- **Finalmente, sobre la figura que te quedó, repite nuevamente los pasos de** b) **y** c) **las veces que puedas…**

© ediciones sm

© ediciones sm

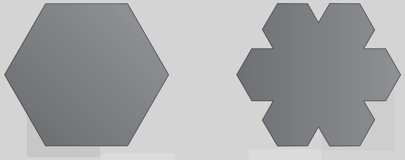
A la figura que has realizado se le llama el "Copo de nieve de Koch", en honor a Niels Fabian Helge von Koch, quien lo creó en 1904.

Cuando el proceso de dividir los lados continúa, el área de la figura no rebasa cierta cantidad, ocupa una región limitada del espacio, es finita. En cambio, su perímetro siempre crece, rebasa cualquier límite, tiende al infinito.

Este tipo de figuras se llaman **fractales.**

¿Quieres seguir dibujando?

a) Inicia ahora con un hexágono regular, bastante más grande, como del tamaño de tu hoja.

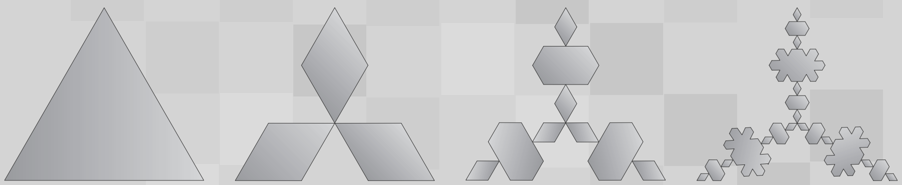


b) Divide en tres partes iguales cada segmento.

c) Sustituye el segmento central, por dos de tamaño idéntico a él, como se muestra en el ejemplo.

Como verás, se trata de un procedimiento similar al que seguiste en la actividad anterior, pero ahora el trazo central se hace hacia adentro de la figura. Realiza este procedimiento dos veces más, siempre partiendo del trazo anterior.

Si realizas los mismos trazos, pero ahora en un triángulo equilátero, obtendrás la llamada "Anti-isla de Koch".



Ahora, crea tu propio fractal. Puedes partir de la figura que tú quieras.

Para saber más sobre fractales puedes consultar:

www.cienciateca.com/fractales.html
www.oni.escuelas.edu.ar/olimpi99/fractales/principal.htm

Valoración del desempeño

- Tener una idea del concepto de fractal.

Otros recursos

Una página muy interesante que muestra diversos ejemplos de fractales en la naturaleza es la siguiente: http://interactiva.matem.unam.mx/puemaco/index.html

Sugerencias didácticas

Esta pagina es muy interesante, pues despierta en el estudiante la noción de cuán grande puede ser “la historia del tiempo”, y sobre todo de qué tan distantes están unos eventos de otros, por ejemplo:

¿Cuántos millones de años tuvieron que pasar desde que se originó el sistema solar hasta que apareció el hombre?

Valoración del desempeño

- Aprender a operar con cantidades infinitamente grandes con notación decimal.

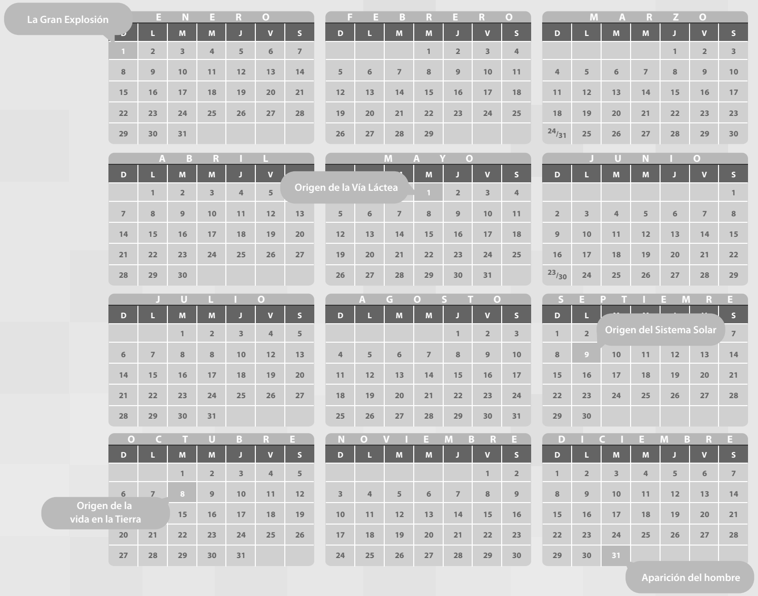
Otros recursos

Un sitio que puede ser de gran interés para los estudiantes es la siguiente dirección electrónica, donde el famoso científico Stephen W. Hawking escribe acerca de la “historia del tiempo”:
http://www.librosmaravillosos.com/historiatiempo/index.html

Y para terminar...

El tiempo cósmico

La teoría más aceptada acerca del origen del Universo es la de la Gran Explosión que se considera sucedió hace 1.5×10^{10} años. Si representamos todo este tiempo en un año, tendríamos las siguientes fechas importantes.



Considera que el acontecimiento sucedió al iniciar el día señalado.

- ¿Cuántos años transcurrieron, aproximadamente, desde que se formó el Universo hasta el origen de la Vía Láctea? 4.96×10^9 años
- Entre el origen del Sistema Solar y la formación de la Tierra pasaron, aproximadamente, 2×10^8 años. Ubica en el calendario la fecha en que se formó la Tierra. 13 de septiembre

Ahora, considera que la vida se originó al iniciar el día señalado y el hombre apareció a las 20 horas del 31 de diciembre.

- ¿Alrededor de cuántos años hubo vida en la Tierra sin que existiera el hombre? 3.48×10^9 años
- El hombre habita el planeta hace, aproximadamente, menos de 6.83×10^6 años.

212

© ediciones sm

© ediciones sm