Propósito del programa integrador. Mostrar cómo se obtienen las fórmulas para calcular el volumen de distintos cuerpos geométricos.

Propósito de la sesión. Encontrar y justificar la fórmula para calcular el volumen de un prisma rectangular.

Organización del grupo. Se sugiere que el problema inicial se resuelva en equipos, el apartado *Manos a la obra* en parejas, y el apartado *Lo que aprendimos* de manera individual.

Sugerencia didáctica. Los alumnos deberían tener ya cierto dominio de la noción del centímetro cúbico y de su representación simbólica, sin embargo, es importante que usted se asegure de que no haya dudas al respecto, pues los alumnos harán uso de esa noción a lo largo de toda la secuencia.

Posibles procedimientos. Los diferentes procedimientos que pueden usar son muy similares a los que se presentan en el apartado *Manos a la obra.* También puede suceder que haya alumnos que sepan aplicar la operación que resuelve el problema (multiplicar las tres medidas) pero tal vez no sepan justificar por qué se hace de esa manera.

Posibles dificultades.

- No acordarse de la fórmula.
- Acordarse de la fórmula pero no manejar bien los decimales.
- Si quieren hacerlo por conteo de cubos se enfrentarán al problema de las partes decimales, ya que aparecen fracciones de cubos.

Sugerencia didáctica. Mientras los alumnos resuelven, trate de identificar al menos dos procedimientos de resolución que puedan contrastarse frente a todo el grupo.

SECUENCIA 14

Volumen de prismas y pirámides

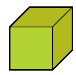
Es importante saber calcular el volumen de un prisma y de una pirámide, pero es más interesante que sepas de dónde se obtienen las fórmulas para calcularlo. Estudiando esta secuencia lo sabrás.

SESIÓN 1

LAS CAJAS

>>> Para empezar

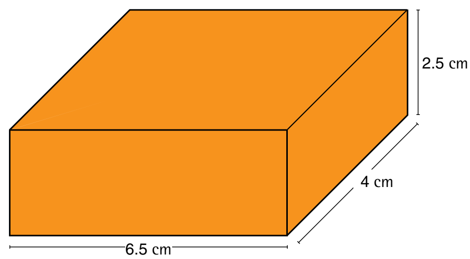
En la primaria aprendiste que el volumen de un cubo que mide un centímetro de arista es un centímetro cúbico:



El centímetro cúbico es una unidad que se usa para medir el volumen de los cuerpos geométricos, se simboliza cm^3.

>>> Consideremos lo siguiente

¿Cuál es el volumen, en centímetros cúbicos, de una caja como la siguiente?



Describan la manera en que calcularon el volumen de la caja.

Comparen los procedimientos y los resultados con otros equipos.

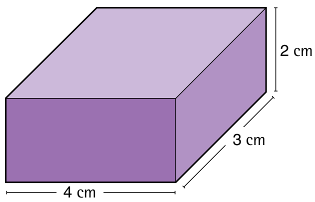
Eje
Forma, espacio y medida.
Tema
Medida.
Antecedentes
En la escuela primaria los alumnos tuvieron distintos acercamientos a la noción de volumen y llegaron a establecer la fórmula para calcular el volumen de ciertos prismas. A partir de esas experiencias y de sus conocimientos sobre el cálculo del área de diversas figuras geométricas, en este grado de la educación secundaria se espera que los alumnos sean capaces de justificar la fórmula para calcular el volumen del cubo y la de cualquier prisma; asimismo, establecerán la fórmula para obtener el volumen de pirámides.

Propósito de la secuencia
Justificar las fórmulas para calcular el volumen de cubos, prismas y pirámides.

Sesión	Propósitos de la sesión	Recursos	
1	**Las cajas** Encontrar y justificar la fórmula para calcular el volumen de un prisma rectangular.	Interactivo	Programa integrador 10
2	**Más volúmenes de prismas** Comprobar que la fórmula V = B × h permite calcular el volumen de prismas rectos.		
3	**Arroz y volumen** Encontrar y justificar la fórmula para calcular el volumen de una pirámide.	Video *"Unas fórmulas se obtienen de otras"* Interactivo	

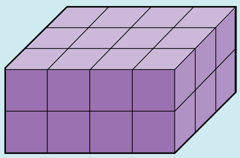
>>> Manos a la obra

I. Consideren ahora una caja en forma de prisma rectangular con las siguientes medidas:



Estos son algunos procedimientos para calcular el volumen de la caja, complétenlos.

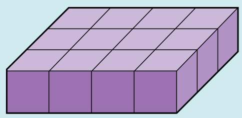
Procedimiento A. Se forma con centímetros cúbicos un prisma de esas medidas y luego se cuenta el número de cubos que se utilizaron.



Número de centímetros cúbicos: ________

Procedimiento B. Se investiga cuántos centímetros cúbicos forman la base del prisma

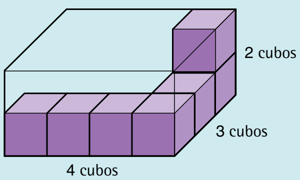
En la base caben: ________ cubos



Luego se multiplica este número por la altura del prisma:

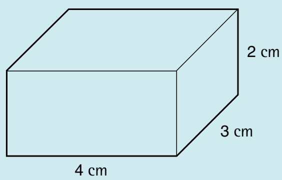
________ × ________ = ________

Procedimiento C. Se investiga cuántos cubos se necesitan a lo largo, a lo ancho y a lo alto de la caja y se multiplican estos tres números.



________ × ________ × ________ = ________

Procedimiento D. Se multiplican las medidas del prisma.



________ × ________ × ________ = ________

Propósito del interactivo. Explorar una forma de obtener el volumen de un prisma.

Propósito de la actividad. Que los alumnos experimenten distintas maneras de calcular el volumen de un prisma rectangular. Se presentan desde los primeros procedimientos que trabajaron en la primaria, como el conteo de cubos (procedimiento A), hasta el uso de la fórmula que aprendieron en sexto grado (procedimiento E).

Sugerencia didáctica. Es importante que usted enfatice que, si bien todos los procedimientos revisados permiten obtener un resultado correcto, algunos son más eficientes que otros, es decir, son más rápidos y evitan ciertos errores; en el caso del problema inicial es mejor aplicar los procedimientos D o E que cualquiera de los otros.

Sugerencia didáctica. Es importante hacer énfasis en la simbolización que se propone; para ello, usted puede apoyarse en una de las ilustraciones anteriores, para que identifiquen el largo, el ancho y la altura. Lea y comente esta información con los alumnos, puede pedirles que expliquen con sus propias palabras lo que entendieron, también pueden copiar la información en sus cuadernos e ilustrarla con un ejemplo del cálculo del volumen de un prisma rectangular. Finalmente, puede pedirles que mencionen ejemplos de las situaciones en las que puede ser útil el cálculo de volúmenes de prismas.

II. El siguiente procedimiento también permite calcular el volumen del prisma:

Procedimiento E. Se calcula el área de la base y se multiplica por la altura.

a) ¿Qué forma tiene la base de la caja? ____________

b) ¿Cuál es el área de esta base? ____________

c) ¿Cuál es la medida de la altura de la caja? ____________

d) ¿Cuál es el producto del área de la base por la altura? ____________

III. Analicen todos los procedimientos y compárenlos con el procedimiento **E**. Escriban un argumento que muestre que el procedimiento **E** es el mismo que el **B**, **C** y **D**.

____

____

Regresen al problema inicial y calculen el volumen de la caja utilizando el procedimiento **E**.

¿Llegan al mismo resultado? ____________

>>> A lo que llegamos

Con ayuda de su profesora o profesor, lean y comenten la siguiente información:

Al calcular el número de centímetros cúbicos (cm³) que forman el prisma se está calculando su volumen. Otras unidades de volumen son el decímetro cúbico (dm³) y el metro cúbico (m³).

Hay varias maneras de calcular el volumen de un prisma rectangular, por ejemplo:

Volumen del prisma rectangular = Largo x ancho x altura

Si el largo se simboliza con l, el ancho con a y la altura con h, tenemos:

$$V = l \times a \times h$$

Observa que al multiplicar largo por ancho estás calculando el área de la base, así que otra manera de escribir la fórmula es:

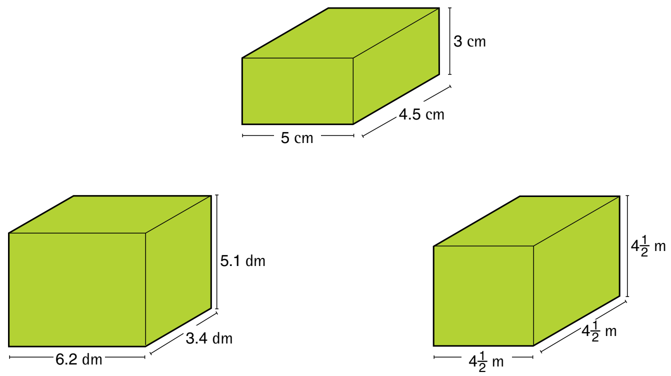
Volumen = Área de la base por la altura

Si simbolizamos con B al área de la base, la fórmula puede escribirse:

$$V = B \times h$$

Lo que aprendimos

1. Calcula el volumen de los siguientes prismas.

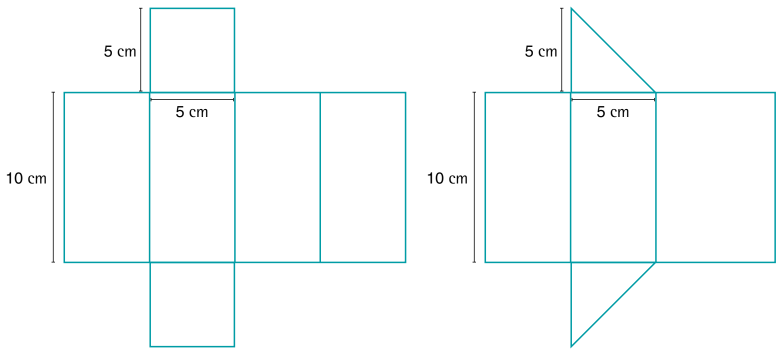


>>> MÁS VOLÚMENES DE PRISMAS

SESIÓN 2

Para empezar

Uno de ustedes construirá un prisma cuadrangular y el otro uno triangular, consideren las medidas indicadas en los siguientes desarrollos y no olviden poner las pestañas donde haga falta.



Propósito de la actividad. Que los alumnos practiquen el cálculo de volúmenes de prismas rectangulares.

Incorporar al portafolios. Si observa que los alumnos tienen dificultades, repase con ellos el apartado *A lo que llegamos* apoyándose en un ejemplo concreto. Usted puede poner otros ejercicios similares; también los alumnos pueden proponer otros prismas para seguir practicando.

Propósito de la sesión. Comprobar que la fórmula V = B×h permite calcular el volumen de prismas rectos.

Organización del grupo. Se recomienda que el apartado *Para empezar* se trabaje en parejas y que el resto de la sesión se resuelva en equipos. Las actividades de *Lo que aprendimos* pueden resolverse de manera individual.

Materiales. Instrumentos geométricos, cartulina o cualquier papel grueso, tijeras y pegamento. Para optimizar el tiempo de esta sesión se sugiere dejar de tarea la construcción de estos dos cuerpos geométricos y pedir a los alumnos que los lleven a clase ya construidos.

Posibles dificultades. Al construir el prisma triangular los alumnos podrían pensar que la medida de la base del rectángulo de la derecha también mide 5 cm. Hágales notar que la base mide más de 5 cm y que esa medida la podrán obtener una vez que hayan trazado el triángulo. Es importante que guarden sus prismas porque los ocuparán nuevamente en la sesión 3 de esta secuencia.

Propósito de la actividad. Que a partir de la sesión anterior, en la que los alumnos calcularon el volumen del prisma rectangular, busquen una manera de calcular el volumen del prisma triangular.

Posibles procedimientos. Es probable que los alumnos calculen el área de la base y la multipliquen por la altura, apoyándose en lo que ya saben o generalizando la fórmula de la sesión anterior. Una dificultad es que no recuerden cómo se calcula el área de un triángulo, si es así, usted puede ayudarles a recordarla, pero únicamente a los equipos que utilicen este procedimiento.

También es probable que noten que con dos prismas triangulares forman un prisma cuadrangular y de ahí concluyan que para calcular el volumen del prisma triangular pueden calcular el del cuadrangular y dividir el resultado entre 2.

Sugerencia didáctica. Recomiende a los alumnos que primero comenten al interior de su equipo cómo encontraron el volumen del prisma triangular y cómo podrían redactar ese procedimiento. Uno de los miembros del equipo puede ir tomando nota, hacer una primera redacción y leerla a sus compañeros para que revisen si las ideas son claras y si coinciden con lo que hicieron. Cuando hayan hecho las correcciones necesarias, todos los miembros del equipo escriben el texto en su propio libro.

>>> Consideremos lo siguiente

Reúnanse con otra pareja y calculen el volumen de cada uno de los prismas que construyeron.

a) Volumen del prisma cuadrangular ____________________

b) Volumen del prisma triangular ____________________

Expliquen cómo calcularon el volumen del prisma triangular.

____

____

Comparen los procedimientos que emplearon para calcular el volumen del prisma triangular.

>>> Manos a la obra

I. A un equipo se le ocurrió juntar dos prismas triangulares y vieron que formaban un prisma cuadrangular.

a) ¿Cuál es el volumen del prisma cuadrangular que se formó?

____

b) ¿Qué parte del prisma cuadrangular es el prisma triangular?

____

c) ¿Cuál es el volumen del prisma triangular?

____

d) En la sesión anterior usaron la siguiente fórmula para calcular el volumen de un prisma rectangular:

V = Área de la base por la altura

e) ¿Esta fórmula se puede usar para un prisma cuadrangular? ____________________

192

Propósito de las actividades. Con las actividades I, II y III de este apartado se espera que los alumnos, a partir de la composición y descomposición de diferentes prismas, comprueben que la fórmula *Área de la base por altura* funciona para calcular el volumen de *cualquier prisma* cuya base sea un polígono.

Propósito del interactivo. Explorar una forma de obtener el volumen de prismas.

Propósito de las preguntas. Con los incisos e) y f) se pretende hacer notar que los prismas cuadrangulares son un caso especial de los rectangulares, porque el cuadrado es un rectángulo y, por lo tanto, la fórmula se aplica también a los prismas cuadrangulares. Esta idea se trabajó en la secuencia 13, en la que los alumnos identificaron al cubo como un caso especial de un prisma.

2

Sugerencia didáctica. Asegúrese de que los equipos efectivamente redacten sus explicaciones. Recuérdeles que primero pueden platicar sus ideas y después ponerlas por escrito.

f) Expliquen por qué ____________________

g) ¿Podrán usar esta fórmula para calcular el volumen de un prisma triangular?

____

Completen usando los datos del prisma triangular:

V = Área de la base por la altura

Área de la base = ____________

Altura= ____________

V = ____________ **×** ____________ **=** ____________

h) ¿Su resultado es el mismo que el que encontraste en el inciso c)? ____________

II. Ahora unan el prisma cuadrangular y el triangular para formar un prisma que tiene por base un trapecio (prisma trapezoidal).

a) Como ya calcularon el volumen del prisma cuadrangular y el volumen del triangular pueden calcular el volumen del prisma trapezoidal.

¿Cuál es? ____________________

b) ¿Se podrá calcular el volumen de un prisma trapezoidal con la fórmula:

Área de la base por la altura? ____________________

Sugerencia didáctica. Es probable que algunos alumnos no se acuerden de la fórmula para calcular el área del trapecio; sugiérales que consulten la secuencia 14 del libro de primer grado, o que investiguen en alguna otra fuente cómo calcular el área de un trapecio.

Sugerencia didáctica. En caso de que algunos alumnos no hayan obtenido los mismos resultados, invítelos a que identifiquen en dónde estuvo el error y que lo corrijan (la equivocación podría ser sólo en los cálculos o en la fórmula).

Sugerencia didáctica. Asegúrese de que los alumnos efectivamente armen los prismas que se indican y que calculen sus volúmenes con los procedimientos enunciados en a) y b), pues esto les permitirá no sólo ejercitar la aplicación de la fórmula, sino también establecer relaciones que los lleven a comprender por qué funciona la fórmula que se propone para obtener el volumen de distintos prismas.

En el caso del prisma con base en forma de romboide, es posible que los alumnos no recuerden la fórmula para calcular el área de esa figura, o que no puedan identificar la altura de la misma. Si lo considera necesario, revise el caso de esa figura con todo el grupo.

4

c) Calculen el volumen del prisma trapezoidal usando la fórmula:

V = Área de la base por la altura

Área de la base = _______________

Altura= _______________

Volumen = _______________ **×** _______________ **=** _______________

Observen que, si hicieron bien las operaciones, obtienen el mismo resultado en los incisos a) y c).

III. Con sus prismas cuadrangulares y triangulares traten de formar:

- Un prisma con base en forma de romboide.
- Un prisma con base en forma de trapecio isósceles (los trapecios isósceles son los que tienen sus lados no paralelos de la misma medida).
- Para cada uno calculen su volumen de dos formas:

a) Sumando los volúmenes de los cuerpos que utilizaron.

b) Aplicando la fórmula **A = B × h**

>>> A lo que llegamos

El volumen de un prisma se calcula con la siguiente fórmula:

Volumen = área de la base por la altura

Si simbolizamos el área de la base con B y a la altura con h, podemos escribir:

V = B × h

La base puede ser cualquier polígono así, que para calcular su área tienes que repasar la manera en que se calcula el área de los diferentes polígonos que conoces, recuerda que esto lo estudiaste en la secuencia 14 de primer grado.

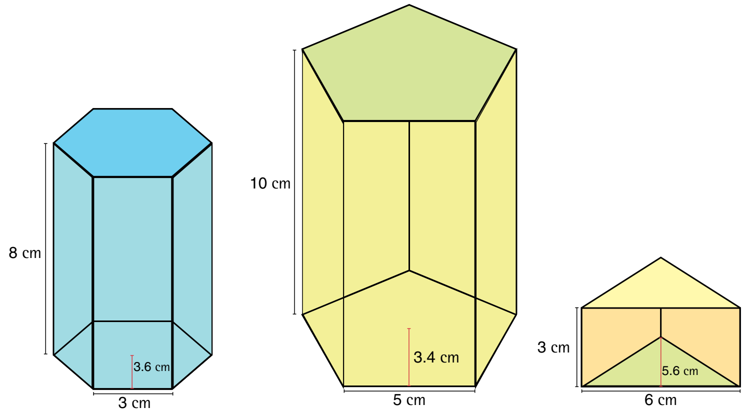
194

Sugerencia didáctica. Comente con los alumnos que la fórmula que se revisó en la sesión anterior, efectivamente permite obtener el volumen de los prismas.

>>> Lo que aprendimos

Sugerencia didáctica. Dado que el propósito de estos ejercicios es afianzar el manejo de una técnica, si lo considera necesario usted puede plantear otros ejercicios similares.

1. Calcula el volumen de los siguientes prismas.



ARROZ Y VOLUMEN

SESIÓN 3

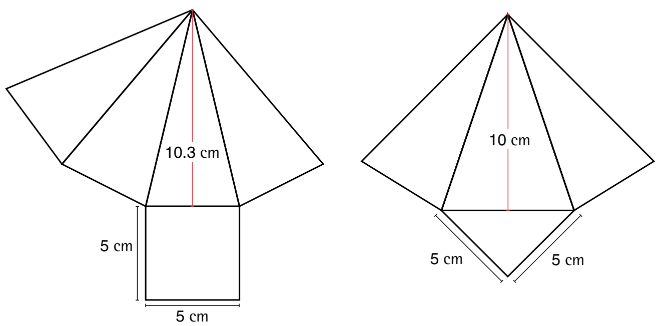
Propósito de la sesión. Encontrar y justificar la fórmula para calcular el volumen de una pirámide.

Organización del grupo. Los alumnos pueden trabajar en parejas durante toda la sesión, y resolver individualmente el apartado *Lo que aprendimos*.

Materiales. Los cuerpos geométricos de la sesión anterior, las pirámides que se proponen en esta sesión y arroz o cualquier otro grano o semilla pequeña, en cantidad suficiente para llenar el prisma cuadrangular.

>>> Para empezar

Uno de ustedes construirá una pirámide cuadrangular y el otro una triangular, consideren las medidas indicadas en los siguientes desarrollos. Dejen la base sin pegar porque van a llenar las pirámides de arroz o de alpiste.



195

Sugerencia didáctica. Para economizar tiempo, usted puede dejar de tarea la construcción de las pirámides. Comente a los alumnos que es posible que algunas caras no coincidan de manera exacta al tratar de unirlas, pues siempre hay la probabilidad de cierto margen de error al hacer mediciones.

Propósito de la actividad. Dado que el cálculo del volumen de una pirámide es un tema nuevo para los alumnos, se espera que en este primer acercamiento logren identificar que el volumen de una pirámide es menor que el volumen de un prisma con la misma base y altura.

Posibles procedimientos. Es poco probable que los alumnos logren deducir que el volumen de la pirámide es la tercera parte del volumen del prisma, en cambio, podrían pensar que es la mitad o alguna otra fracción. No se pretende que lleguen al resultado exacto, sino que enfrenten un nuevo problema que les permita explorar estrategias y soluciones posibles. Más adelante, a través de las actividades del apartado *Manos a la obra*, los alumnos podrán conocer y practicar un procedimiento sistemático.

Sugerencia didáctica. En caso de que ninguno de los alumnos llegue al resultado correcto, no se los diga en este momento; permita que ellos mismos construyan la respuesta a lo largo de la lección. En cambio, sí es conveniente que los anime a expresar sus ideas y argumentos respecto de cuál de los cuerpos tiene mayor volumen y cómo podrían calcularlo, pues varias de estas ideas pueden ser una aproximación que les ayude a comprender las afirmaciones que más adelante se les presentarán.

Propósito de la actividad. Que los alumnos establezcan, de manera empírica, la relación entre los volúmenes de un prisma y de una pirámide con la misma base y altura.

>>> Consideremos lo siguiente

Comparen el prisma cuadrangular, que construyeron en la sesión anterior, con la pirámide cuadrangular que acaban de armar.

a) ¿Cuál de los dos tiene mayor volumen? ______

b) ¿Cómo podrían calcular el volumen de la pirámide? ______

______

c) Calculen el volumen de la pirámide y anoten su resultado.

Volumen= ______

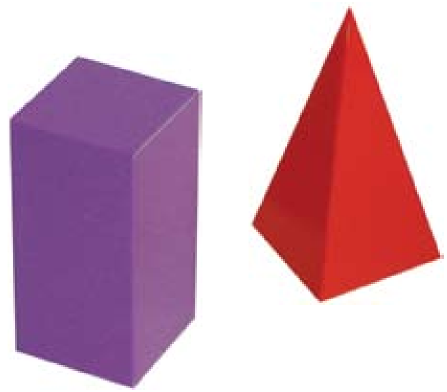
Comparen sus procedimientos y sus resultados.

>>> Manos a la obra

I. Realicen lo que se indica.

a) Quiten una de las bases al prisma cuadrangular que construyeron en la sesión anterior para que puedan llenarlo de arroz o de alpiste.

b) Verifiquen que la pirámide cuadrangular y el prisma cuadrangular tienen exactamente las mismas medidas de la base y la misma altura.



196

Propósito del interactivo. Explorar una forma de obtener el volumen de pirámides.

c) Llenen la pirámide cuadrangular de arroz y vacíen esta cantidad de arroz en el prisma cuadrangular.

- ¿Qué parte del prisma quedó ocupada por el arroz?

d) Repitan el paso del inciso c) las veces que sea necesario hasta que el prisma se llene de arroz y comprueben su respuesta a la pregunta anterior.

e) ¿Cuál es el volumen del prisma cuadrangular?

¿Cuál es el volumen de la pirámide?

¿Cómo lo averiguaron?

f) Hagan lo mismo con el prisma triangular que construyeron en la sesión anterior y la pirámide triangular.

- ¿Qué parte del volumen del prisma triangular es el volumen de la pirámide triangular?
- ¿Cuál es el volumen de la pirámide triangular?
- ¿Cómo lo averiguaron?

197

Posibles dificultades. Es probable que algunos alumnos no lleguen al resultado correcto (con una primera vez que se vacíe el contenido de la pirámide en el prisma, la capacidad de éste se ocupa sólo una tercera parte, por lo que el procedimiento debe hacerse 3 veces para llenar el prisma). Si nota que no llenan el recipiente con 3 veces, coménteles que probablemente hubo alguna imprecisión al llenar la pirámide o al vaciar las semillas (algunas se pudieron haber caído), o tal vez los cuerpos no tienen exactamente la misma base y la misma altura. Es importante que los alumnos constaten que el volumen de la pirámide es la tercera parte del volumen de un prisma con la misma base y altura.

Sugerencia didáctica. Aun cuando algunos alumnos podrían generalizar sus hallazgos con la experiencia anterior, es importante que también hagan el vaciado de semillas con estos dos cuerpos geométricos, pues es una manera de comprobar su hipótesis, y para aquellos alumnos que todavía no identifican la relación entre los volúmenes de los prismas y las pirámides, es una oportunidad para lograrlo.

2

Sugerencia didáctica. Anímelos a que comenten primero sus ideas con su pareja y que después ensayen una redacción. Cuando lean lo que escribieron a todo el grupo, considere un momento para que puedan corregir o enriquecer sus escritos.

Descripción del video. El video es formalizador. Con apoyo de las imágenes se refuerza el concepto de volumen y se da la justificación de algunas fórmulas de pirámides y prismas. Se dan ejemplos para trabajar visualmente la siguientes ideas: concepto de volumen, deducción de la fórmula para calcular el volumen de un prisma y deducción de la fórmula para calcular el volumen de una pirámide.

Incorporar al portafolios. Es importante que los alumnos practiquen el uso de esta fórmula y la que estudiaron en las sesiones anteriores, pues en la secuencia 15 las aplicarán a problemas de distintos contextos. Si identifica que los alumnos aún presentan dificultades, revise con ellos nuevamente el apartado *A lo que llegamos* de esta sesión y plantee problemas similares.

II. Expliquen la manera en que se puede calcular el volumen de una pirámide.

Comparen sus resultados, en particular comenten lo que escribieron en la actividad II.

>>> A lo que llegamos

El volumen de una pirámide recta de base poligonal puede calcularse con la fórmula:

$$\text{Volumen} = \frac{\text{área de la base} \times \text{altura}}{3}$$

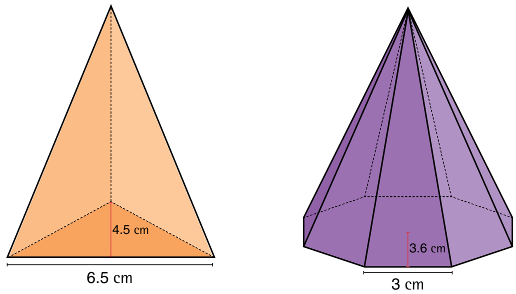
$$V = \frac{B \times h}{3}$$

Unas fórmulas se obtienen de otras

Ahora ya conoces la relación que hay entre el volumen de un prisma y una pirámide que tienen igual base y altura, y esto te ha permitido construir la fórmula para calcular el volumen de una pirámide.

>>> Lo que aprendimos

1. Calcula el volumen de las siguientes pirámides cuya altura es de 8 cm.



>>> Para saber más

Consulta en las Bibliotecas Escolares y de Aula:
Hernández Garciadiego, Carlos. "Volumen de prismas irregulares" y "Volumen de conos y pirámides", en *La geometría en el deporte*. México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2003.

Propósito del programa integrador. Mostrar cómo se obtienen las fórmulas para calcular el volumen de distintos cuerpo geométricos.

Propósito de la sesión. Encontrar la relación entre las medidas de volumen y de capacidad, en particular que 1 decímetro cúbico es igual a un litro.

Organización del grupo. La sesión puede resolverse en parejas, intercalando momentos de discusión grupal. El apartado *Lo que aprendimos* puede resolverse individualmente.

Materiales. Por pareja, una caja sin tapa en forma de cubo cuya base mida 10 cm por lado (puede pedir a los alumnos que previamente la construyan en casa), un recipiente de un litro de capacidad y semillas o granos pequeños (aproximadamente 1 kg).

Propósito de la actividad. Que los alumnos recuerden algunos de los aspectos que estudiaron en sexto grado respecto de la relación entre las medidas de volumen y capacidad.

SECUENCIA 15

Aplicación de volúmenes

Y ahora que ya aprendiste las fórmulas para calcular el volumen de prismas y pirámides estás listo para explorar la relación entre volumen y capacidad, y también para resolver problemas relacionados con estos temas.

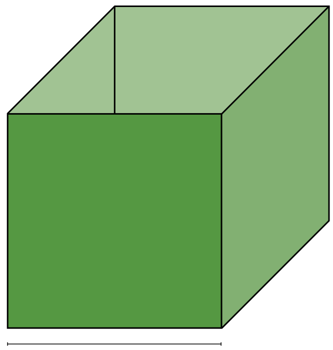
SESIÓN 1

EL DECÍMETRO CÚBICO

>>> Para empezar

En la sesión 1 de la secuencia anterior aprendiste que el volumen de un recipiente se puede calcular en centímetros cúbicos.

¿Qué volumen le cabe, en centímetros cúbicos, a una caja en forma de cubo que mide 5 cm de arista? ______



5 cm

En la primaria aprendiste que una unidad para expresar la capacidad es el **litro**.

¿Sabrías decir cuál es la capacidad de esta caja en litros? ______.
En esta lección aprenderás a responder preguntas como ésta.

200

Eje
Forma, espacio y medida.
Tema
Medida.
Antecedentes

A partir de lo que ya trabajaron en la secuencia 14, los alumnos aplicarán lo aprendido a diversas situaciones en las que tendrán la oportunidad de:

- Hacer estimaciones.
- Hallar datos faltantes a partir de otros conocidos.
- Identificar relaciones de variación proporcional, ya sea directa o inversa.

El antecedente inmediato para el último tipo de problemas es la secuencia 8 del bloque 1 del segundo grado, donde se abordaron problemas de proporcionalidad múltiple.

Propósitos de la secuencia

Calcular el volumen de cubos, prismas y pirámides rectos. Calcular datos desconocidos, dados otros relacionados con las fórmulas del cálculo de volumen. Establecer relaciones de variación entre diferentes medidas de prismas y pirámides. Realizar conversiones de medidas de volumen y de capacidad y analizar la relación entre ellas.

Sesión	Propósitos de la sesión	Recursos	
1	**El decímetro cúbico** Encontrar la relación entre las medidas de volumen y de capacidad, en particular que 1 decímetro cúbico es igual a un litro.	Interactivo	Programa integrador 10
2	**Capacidades y volúmenes** Resolver problemas relacionados con el cálculo de volúmenes y capacidades.	Video *"Problemas prácticos"*	
3	**Variaciones** Explorar la manera en que varía el volumen de un prisma o una pirámide cuando varían sus dimensiones.	Interactivo	

>>> Consideremos lo siguiente

Construyan una caja en forma de cubo, sin tapa, que mida 1 dm de arista y consigan un recipiente cuya capacidad sea de 1 litro.

Recuerden que:

1 dm = 10 cm

La caja que construyeron es un decímetro cúbico (dm³).

Investiguen:

a) ¿Cuál es el volumen que le cabe a la caja medido en centímetros cúbicos? 1000 cm^3

b) ¿Cuál es la capacidad de la caja medida en litros? 1 litro

c) ¿La capacidad de la caja será mayor, menor o igual a la del recipiente de 1 litro? Igual

d) ¿A qué parte de 1 litro equivale 1 centímetro cúbico? A 1 mililitro

Comenten sus respuestas a las preguntas anteriores y la manera en que las averiguaron.

>>> Manos a la obra

I. Para saber si a la caja de un decímetro cúbico le cabe más o menos de un litro llenen el recipiente de un litro con alguna semilla pequeña y vacíen el contenido en la caja.

Sugerencia didáctica. Es probable que algunos alumnos respondan inmediatamente a estas preguntas porque este tema ya lo estudiaron en la escuela primaria, en ese caso invítelos a que comprueben sus respuestas haciendo la actividad I del apartado *Manos a la obra*. Para quienes no tengan una respuesta, motívelos a que usen el material para investigar lo que se les pregunta. En caso de que algunas respuestas sean incorrectas, permita que los alumnos descubran sus errores mediante el desarrollo de las siguientes actividades. Más adelante pueden regresar a este apartado para corregir sus respuestas.

Propósito del interactivo. Explorar la relación entre las medidas de volumen y de capacidad.

Sugerencia didáctica. Con el interactivo puede presentar algunas animaciones de vaciado del contenido de un recipiente en otro para establecer las relaciones entre las medidas de volumen y de capacidad. Si lo considera oportuno puede explorar con sus alumnos otras escenas del interactivo que presentan las equivalencias entre unidades de volumen.

Sugerencia didáctica. Recuerde a los alumnos que 1 decímetro cúbico equivale a 1 000 centímetros cúbicos, pues es el resultado de multiplicar 10 cm × 10 × cm 10 cm. Las equivalencias entre las unidades de volumen es un tema complicado para los alumnos, y aunque se trata de una sesión de repaso, si lo considera necesario puede trabajar en grupo las actividades I y II del apartado *Manos a la obra*.

a) ¿Cuál es la capacidad de la caja expresada en litros? ______

b) Completen la siguiente igualdad:

______ decímetro cúbico = ______ litro

______ dm^3 = ______ ℓ

c) ¿A cuántos centímetros cúbicos equivale un decímetro cúbico?

Entonces: ______ cm^3 = 1 ℓ

1 cm^3 = ______ de litro

II. Consideren ahora una cisterna en forma de cubo que mida 1 metro de arista.

a) ¿Cuál es la capacidad de la cisterna en metros cúbicos? 1 m^3

b) ¿Cuál es su capacidad en decímetros cúbicos? 1000 dm^3

c) ¿Y en centímetros cúbicos? 1000 000 cm^3

d) ¿Cuántos litros de agua le caben a esta cisterna? 1000 litros

Sugerencia didáctica. Enfatice la equivalencia que aquí se señala, pues les permitirá resolver las situaciones problemáticas que se plantean en el siguiente apartado.

Propósito del interactivo. Explorar la relación entre las medidas de volumen y de capacidad.

>>> A lo que llegamos

Las medidas de volumen y de capacidad tienen una estrecha relación. Es común usar las unidades de volumen para expresar la capacidad de un recipiente.

En particular, la relación:

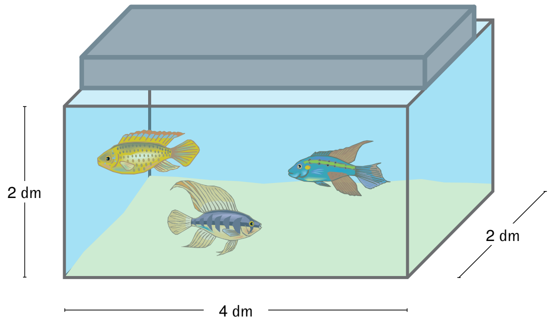
1 decímetro cúbico equivale a 1 litro

1 dm^3 = 1 ℓ

es muy útil para resolver problemas acerca de la capacidad de recipientes como peceras, albercas, cisternas, etcétera.

>>> Lo que aprendimos

1. Calcula la cantidad máxima de agua que puede contener una pecera de las siguientes dimensiones:



2. ¿Cuál es la capacidad, expresada en litros, de un envase que mide 20 cm de largo, 10 cm de ancho y 5 cm de altura? ______

Respuesta. 16 litros.

Posibles procedimientos. Si los alumnos calculan el volumen en centímetros cúbicos obtendrán 1 000 cm^3 y de ahí tendrán que hacer la conversión a 1 dm^3 y 1 litro. Es más sencillo si hacen las conversiones a decímetros cúbicos desde las medidas lineales, es decir, el envase mide 2 dm × 1 dm × $\frac{1}{2}$ dm, multiplicando estas cantidades obtienen directamente el resultado. En la mayoría de los problemas que implican la conversión entre capacidad y volumen conviene pasar las medidas involucradas a decímetros y después hacer los cálculos, de esta forma el resultado obtenido corresponde a la capacidad en litros. Una vez que los alumnos hayan resuelto, analice con ellos la ventaja de hacer los cálculos convirtiendo desde un principio los centímetros a decímetros.

Respuesta. 1 litro.

CAPACIDADES Y VOLÚMENES

SESIÓN 2

>>> Lo que aprendimos

Problemas prácticos

El tema del volumen y su relación con la capacidad tiene un amplio uso en la resolución de problemas reales. Los ejercicios siguientes son un ejemplo de ello.

Propósito de la sesión. Resolver problemas relacionados con el cálculo de volúmenes y capacidades.

Organización del grupo. Se sugiere que los alumnos resuelvan organizados en equipos y que comparen sus respuestas con todo el grupo.

1. Resuelvan los siguientes problemas. Por el momento no hagan operaciones, sólo den un resultado aproximado y anótenlo donde se indica.

a) Se quiere construir un prisma cuadrangular (base cuadrada) cuyo volumen sea de 360 cm^3. Si la altura será de 10 cm, ¿cuál será la medida de los lados del cuadrado de las bases?

Estimación del resultado: ______

b) La gran pirámide de Keops en Egipto tiene una base cuadrada de 270 m de lado y una altura de 167 m. ¿Cuál es su volumen?

Estimación del resultado: ______

203

Descripción del video. Se presentan varios problemas en donde es necesario calcular el volumen de prismas y pirámides para resolverlos. El video se puede utilizar al final de la sesión, pues contiene problemas complementarios.

Propósito de la actividad. La estimación de resultados es una habilidad matemática que los alumnos pueden desarrollar de manera gradual. En este caso, esa habilidad les permitirá centrar su atención en las relaciones entre los datos antes de hacer cálculos precisos.

Sugerencia didáctica. Insista con los alumnos en que no se requiere que hagan un cálculo mental exacto sino que sólo aproximen sus resultados, es decir, que de acuerdo con la información que se les está dando, propongan una medida probable. Anime a los alumnos a que sugieran a sus compañeros de equipo una estimación probable; en caso de que hayan propuestas en las que las medidas son demasiado diferentes, pídales que argumenten su estimación; esto les ayudará a identificar posibles errores en la interpretación del problema.

Sugerencia didáctica. Las cantidades involucradas en este problema son difíciles de manejar, no se preocupe si los alumnos dan una estimación muy alejada de la respuesta correcta, ellos se darán cuenta de qué tan cercana fue su estimación cuando hagan lo que se indica en la actividad 2.

Sugerencia didáctica. Este problema tiene la característica de dar lugar a varias soluciones correctas, lo cual contribuye a que los alumnos consideren más de una alternativa de solución. Sin embargo, también es necesario que se reflexione en cuanto a la pertinencia, en un sentido práctico, de esas alternativas. Por ejemplo, un tinaco que mida 100 dm × 25 dm × 1 dm puede almacenar 2 500 litros de agua, pero seguramente sería poco práctico construir un tinaco con esas dimensiones; promueva este tipo de reflexiones con sus alumnos.

Sugerencia didáctica. Recomiende a los alumnos que, particularmente para los problemas c y d, trabajen con decímetros desde un inicio.

Respuestas.

a) El lado del cuadrado mide 6 cm.

b) El volumen de la pirámide es de 4 058 100 m³.

c) Hay varias respuestas posibles, una de ellas es: largo 25 dm, ancho 10 dm, altura 10 dm.

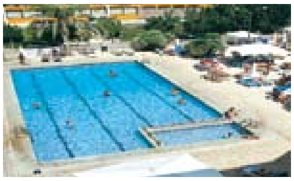
d) Profundidad mínima: 20 dm (o también, 200 cm o 2 m).

e) Peso del lingote: 1 263.5 g

f) Volumen de la piedra: 450 cm³ (la altura de la pecera no es un dato necesario, es un distractor).

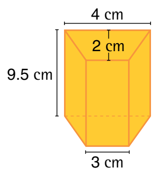
c) Un señor desea constuir una cisterna de agua, en forma de prisma rectangular, para almacenar 2 500 litros de agua. Escriban un posible tamaño de la cisterna anotando las medidas del largo, ancho y profundidad.

Estimación del resultado: ______________



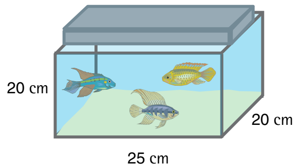
d) Una alberca tiene un fondo rectangular de 50 m por 40 m, si se sabe que puede contener como máximo 4 000 000 de litros de agua, ¿cuál es la profundidad mínima de la alberca?

Estimación del resultado: ______________



e) Un lingote de oro tiene forma de prisma trapezoidal. Se sabe que un centímetro cúbico de oro pesa, aproximadamente, 19 gramos, ¿cuánto pesa el lingote ilustrado a la izquierda?

Estimación del resultado: ______________



f) En una pecera como la de la izquierda se introdujo una piedra y la altura del agua aumentó 0.9 cm. ¿Cuál es el volumen de la piedra?

Estimación del resultado: ______________

2. Calculen las respuestas a los problemas anteriores, pueden usar calculadora. Después comparen con sus estimaciones.

a) ______________ d) ______________

b) ______________ e) ______________

c) ______________ f) ______________

Comenten sus respuestas y procedimientos con otros compañeros del grupo.

204

3

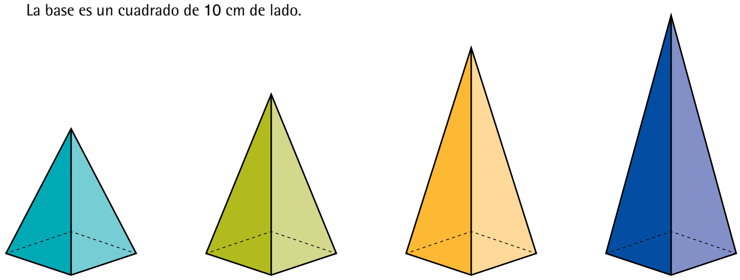
Sugerencia didáctica. Usted puede aprovechar la confrontación de resultados para que los equipos que hayan hecho estimaciones muy cercanas al resultado compartan con los demás sus estrategias de estimación.

VARIACIONES

SESIÓN 3.

>>> Lo que aprendimos

1. Consideren varias pirámides que tienen la base de igual tamaño y cuya altura varía. La base es un cuadrado de 10 cm de lado.

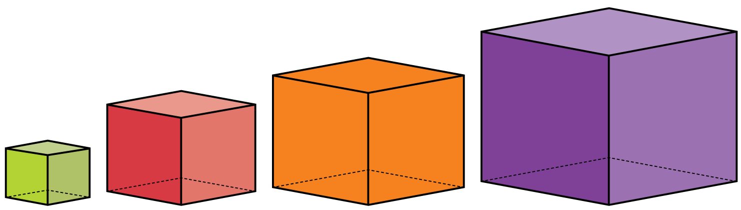


Completen la siguiente tabla:

Altura de la pirámide (cm)	1	2	3	4	5	6	7
Volumen de la pirámide (cm^3)							

- ¿Es proporcional la variación del volumen de la pirámide con respecto a la altura cuando la base se mantiene constante? __________
- Argumenten su respuesta __________

2. Consideren un cubo en el que la medida de su arista va aumentando.



Propósito de la sesión. Explorar la manera en que varía el volumen de un prisma o de una pirámide cuando varían sus dimensiones.

Organización del grupo. Se sugiere que los alumnos trabajen organizados en equipos.

Propósito de la actividad. Que los alumnos identifiquen que, si se mantiene constante el área de la base, el volumen de una pirámide varía proporcionalmente en relación con la altura.
El antecedente para que los alumnos puedan establecer esta relación se encuentra en todas las lecciones de proporcionalidad de primer y segundo grado, en particular la secuencia 8 del bloque 1 de segundo grado, en donde los alumnos estudiaron la proporcionalidad múltiple.

Propósito del interactivo. Explorar cómo varía el volumen de una pirámide o de un prisma al variar alguna de sus dimensiones.

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que cambien la altura de la pirámide para llenar la tabla con los datos que se presentan. Si lo considera necesario pueden trabajar con diferentes pirámides. Pida a los alumnos que copien las tablas generadas para cada pirámide. Una vez que los alumnos sepan de dónde se obtienen los datos de las tablas puede presionar el botón **Resolver** para ahorrar tiempo y obtener los datos de diferentes tablas. Al final pida a los alumnos que analicen las tablas generadas, el propósito de esta actividad es que identifiquen la relación proporcional existente entre el volumen y la altura, cuando se modifica la altura y se mantiene el área de la base.

Sugerencia didáctica. Como lo que interesa es que los alumnos exploren la relación entre los datos, es importante que no inviertan mucho tiempo en hacer las operaciones, permítales que usen la calculadora para completar ésta y todas las tablas de la sesión.

Sugerencia didáctica. En caso de que algunos alumnos no recuerden cómo identificar una relación de proporcionalidad, usted puede mencionarles algunas de sus características más relevantes (en la página 112 del volumen I del *Libro para el Maestro* de primer grado se ejemplifica la proporcionalidad directa entre dos conjuntos de cantidades, o bien, en la página 228 del volumen II del *Libro para el Maestro* también de primer grado, encontrará los criterios para determinar la proporcionalidad inversa). En la secuencia 8 del bloque 1 de este grado, los alumnos trabajaron con el caso del volumen de un prisma y establecieron que:

"Cuando las medidas del largo y del ancho permanecen fijas, la medida de la altura se encuentra en proporción directa con el volumen". En caso de que los alumnos muestren algunas dificultades, usted puede remitirlos al primer *A lo que llegamos* de la primera sesión de esa secuencia.

Usted puede apoyar a los alumnos en la argumentación de sus respuestas haciendo preguntas como las siguientes: ¿cómo te diste cuenta de que son proporcionales?, ¿cómo puedes comprobarlo?

Sugerencia didáctica. En este caso no hay variación proporcional directa ni inversa. Para apoyar a los alumnos en la elaboración de argumentos, sugiérales que planteen un contraejemplo, es decir, que propongan una propiedad de la proporcionalidad directa y otra de la inversa que no se cumplan en esta tabla.

Posibles dificultades. Debido a que los alumnos están más familiarizados con la proporcionalidad directa que con la inversa, es probable que no identifiquen que, en este caso, al fijar el volumen y variar el área de la base y la altura del prisma, estos dos últimos conjuntos de cantidades son inversamente proporcionales entre sí: si el área aumenta al doble, la altura disminuye a la mitad, si aumenta cuatro veces, la altura disminuye a la cuarta parte, etcétera. Invítelos a que verifiquen al menos una propiedad tanto de la proporcionalidad directa (para que vean que en este caso no se cumple) como de la inversa.

Completen la siguiente tabla:

Medida de la arista (cm)	1	2	3		8		20
Volumen del cubo (cm^3)				125		3375	

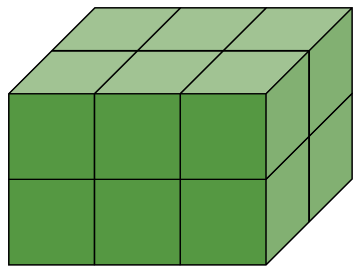
- ¿Es proporcional la variación del volumen del cubo con respecto a su arista? ____
- Argumenten su respuesta ____

3. Completen la siguiente tabla considerando que se trata de varios prismas cuadrangulares, todo ellos con un volumen igual a 400 cm^3 y una base con área según la medida que se indica en la tabla.

Área de la base (cm^2)	1	4	16	25	100
Altura del prisma (cm)					

- ¿Es proporcional la variación de la altura al área de la base? ____
- Argumenten su respuesta ____

4. Se tiene un prisma rectangular como el siguiente:



Propósito de la actividad. Que los alumnos exploren cómo varía el volumen de un prisma cuando se modifica una, dos o sus tres dimensiones.

Anoten en la tabla el número de cubos que se necesitarán para realizar lo que se indica en cada caso. Siempre se toma como referencia el prisma original.

Si se:	El número de cubos que se requieren es:	¿Cuántas veces aumentó el volumen?
Aumenta sólo su altura al doble	24	2
Aumenta sólo el largo al triple	36	3
Disminuye sólo el ancho a la mitad	6	$\frac{1}{2}$ vez ó 0.5 (realmente disminuye)
Aumentan al doble el largo y el ancho	48	4
Aumentan al triple el ancho y la altura	108	9
Aumentan al doble el largo, el ancho y la altura	96	8
Aumentan al doble el largo y el ancho se disminuye a la mitad dejando la altura igual	12	ninguna

a) Si un prisma aumenta la medida de su largo, ancho y altura al triple, ¿cuántas veces aumenta su volumen? 27 veces

b) ¿El aumento del volumen es proporcional al aumento del largo, ancho y altura? no

c) Argumenten su respuesta Si fuera directamente proporcional, aumentaría 3 veces el volumen; si fuera inversamente proporcional, disminuiría una tercera parte. El volumen está aumentando 3^3 veces.

Comenten sus respuestas y sus procedimientos con otros compañeros del grupo.

>>> Para saber más

Consulten en las Bibliotecas Escolares y de Aula:
De la Peña, José Antonio. "¿Cuál es la pirámide más grande?" en *Geometría y el mundo*. México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2003.

Propósito del programa integrador. Mostrar mediante la comparación de razones, cuándo dos situaciones son directamente proporcionales.

Propósito de la sesión. Establecer cuándo dos situaciones de proporcionalidad directa son equivalentes.

Organización del grupo. La sesión se resuelve en parejas y los comentarios sobre las actividades son grupales.

Propósito de la actividad. Sabemos que en una tabla que represente una situación de proporcionalidad los cocientes de las cantidades que se corresponden son iguales a la constante de proporcionalidad, por ejemplo:

Constante de proporcionalidad 3	
Cantidad de dulces	Cantidad a pagar
2	6
7	21
18	54

En todos los casos $6 \div 2 = 3$, $21 \div 7 = 3$, $54 \div 18 = 3$, etcétera.

Se utilizará este hecho para comparar relaciones entre conjuntos y averiguar si son o no directamente proporcionales. En términos del problema planteado, se podrá definir si los automóviles tienen un rendimiento constante. El rendimiento, como ya vieron en primer grado, es igual a la constante de proporcionalidad, y ahora verán que es también el cociente que resulta de dividir una cantidad del conjunto B (distancia recorrida) entre la cantidad correspondiente del conjunto A (cantidad de gasolina). Si siempre se obtiene el mismo número, el rendimiento es constante y se trata de una relación de proporcionalidad directa.

SECUENCIA 16

Comparación de situaciones de proporcionalidad

En esta secuencia resolverás problemas de comparación de cocientes en situaciones de proporcionalidad directa.

SESIÓN 1

EL RENDIMIENTO CONSTANTE

>>> Para empezar

En la actualidad uno de los aspectos más importantes del diseño de un automóvil es el rendimiento. El rendimiento es el número de kilómetros que se recorren por cada litro de gasolina que se consume.

Al diseñar un automóvil es importante verificar que, bajo las mismas condiciones de uso, se tenga un *rendimiento constante*. Es decir, que se recorra siempre la misma cantidad de kilómetros con la misma cantidad de gasolina.

>>> Consideremos lo siguiente

Una compañía de automóviles hizo pruebas a tres de sus modelos para verificar que tuvieran rendimientos constantes. Las siguientes tablas muestran los registros de la distancia recorrida y la cantidad de gasolina gastada.

Cantidad de gasolina (en litros)	Distancia recorrida (en kilómetros)
2	32
4	64
16	256

Modelo A

Cantidad de gasolina (en litros)	Distancia recorrida (en kilómetros)
3	51
7	119
11	187

Modelo B

Cantidad de gasolina (en litros)	Distancia recorrida (en kilómetros)
3	48
15	240
21	378

Modelo C

208

Eje
Manejo de la información
Tema
Análisis de la información
Antecedentes
Los alumnos han trabajado desde la primaria diversos aspectos de las relaciones de proporcionalidad. En esta secuencia aprenderán a obtener los cocientes de cantidades correspondientes para establecer comparaciones entre dos o más relaciones.

Propósito de la secuencia
Resolver problemas de comparación de razones, con base en la noción de equivalencia.

Sesión	Propósitos de la sesión	Recursos	
1	**El rendimiento constante** Establecer cuándo dos situaciones de proporcionalidad directa son equivalentes.	Interactivo	Programa integrador 11
2	**La concentración de pintura** Comparar razones en distintas situaciones.	Video "Comparación de razones" Interactivo	

a) De los modelos **A**, **B** y **C**, ¿cuál no tuvo un rendimiento constante? ____________

b) ¿Cuál modelo tuvo el mejor rendimiento? ____________

Comparen sus respuestas y cómo las obtuvieron.

>>> Manos a la obra

I. Comenten: En una escuela dijeron que el modelo **C** tuvo rendimiento constante: 16 kilómetros por cada litro de gasolina.

a) ¿Están de acuerdo con la respuesta de la otra escuela? __________ ¿Por qué?

____

b) Para comprobar si el modelo **C** tuvo rendimiento constante, hagan las multiplicaciones de las **cantidades de gasolina** por **16** y verifiquen si obtienen las **distancias recorridas**.

c) Si se recorrieron 378 kilómetros con 21 litros de gasolina, ¿cuántos kilómetros se recorrieron por cada litro? ____________

d) ¿Cuál es el rendimiento del modelo **A**? ____________

e) ¿Cuál es el rendimiento del modelo **B**? ____________

II. Recuerden que cuando las **cantidades** de un conjunto son **directamente proporcionales** a las de otro conjunto se cumple la siguiente propiedad:

Todos los cocientes que se obtienen al dividir una cantidad de un conjunto entre la cantidad correspondiente en el otro conjunto son iguales.

Y recíprocamente, si son iguales todos los cocientes que se obtienen al dividir una cantidad de un conjunto entre la cantidad correspondiente en el otro conjunto, entonces son directamente porporcionales.

En sus cuadernos hagan las divisiones de los **kilómetros recorridos** entre los **litros de gasolina** que se consumieron en las pruebas de los tres modelos de automóviles y contesten:

a) De las siguientes relaciones subrayen las que son de proporcionalidad directa.

- La relación entre el consumo de gasolina y la distancia recorrida por el modelo **A**.
- La relación entre el consumo de gasolina y la distancia recorrida por el modelo **B**.
- La relación entre el consumo de gasolina y la distancia recorrida por el modelo **C**.

b) De las relaciones que son de proporcionalidad directa, ¿cuáles son las constantes de proporcionalidad correspondientes?

Modelo A constante 16 kilómetros por cada litro de gasolina

Modelo B constante 17 kilómetros por cada litro de gasolina

209

Posibles procedimientos. Los alumnos pueden averiguar si los automóviles tienen un rendimiento constante de distintas maneras, por ejemplo:

- Hallando el valor unitario en cada caso (encontrando cuántos kilómetros recorre cada automóvil con un litro de gasolina) y verificando que en todos los renglones de la tabla ese número permita obtener la distancia recorrida al multiplicarlo por la cantidad de litros de gasolina.
- Encontrando la constante de proporcionalidad en cada caso. Para el automóvil A sería

  $2 \times$ ________ $= 32$

  $4 \times$ ________ $= 64$

  $16 \times$ ________ $= 256$

  Si el factor buscado es siempre el mismo número, el automóvil tiene un rendimiento constante.
- Fijándose en las relaciones entre los números de cada tabla, por ejemplo, en la del modelo A

	2	32	
se duplica	4	64	se duplica
se cuatriplica	16	256	se cuatriplica

  En las tablas B y C no será sencillo hacer esto. Si algunos alumnos eligieron este procedimiento y no saben qué hacer, sugiérales que empleen alguno de los otros dos procedimientos.

Respuestas.

a) El modelo C (cuando consume 21 litros de gasolina tendría que recorrer 336 kilómetros para que su rendimiento fuera constante).

b) El modelo B.

Sugerencia didáctica. Pida a dos o tres alumnos que hayan empleado procedimientos distintos, que pasen al pizarrón a explicar cómo obtuvieron las respuestas.

Respuestas.

a) No, el rendimiento del modelo C no es constante.

c) 18 kilómetros por litro. Para hallar esa respuesta pueden pensarla como $21 \times$ _____ $= 378$, o bien, $378 \div 21 =$ _____

d) 16 kilómetros por litro.

e) 17 kilómetros por litro.

Sugerencia didáctica. Es la primera vez que en una relación de proporcionalidad se mencionan a los cocientes de las cantidades que se corresponden. Haga ver a los alumnos que el cociente es precisamente la constante de proporcionalidad.

También puede pedirles que verifiquen esta propiedad en alguna de las otras situaciones de proporcionalidad directa que hayan resuelto anteriormente. Si la situación es de proporcionalidad directa, los cocientes deben ser iguales.

Sugerencia didáctica. Comenten esta información. A los alumnos les debe quedar claro cuáles son los cocientes de las cantidades que se corresponden y por qué son iguales a la constante de proporcionalidad.
Enfatice que hallar los cocientes entre cantidades que se corresponden es un método útil para verificar si la relación es de proporcionalidad directa o no, y si lo es, el número obtenido es la constante de proporcionalidad.

Respuestas.
a) 17 kilómetros por litro.
b) 18 kilómetros por litro.
c) 16 kilómetros por litro.
d) El modelo A y el modelo F.
e) El modelo E.

Sugerencia didáctica. Si lo considera útil, plantee algunos ejemplos en el pizarrón en los que se comparen dos relaciones de proporcionalidad directa. Puede utilizar algunas situaciones del libro de primer grado.

>>> A lo que llegamos

En una relación de proporcionalidad directa entre dos conjuntos de cantidades, los **cocientes** de las **cantidades** que se **corresponden** son **iguales**. Ese cociente se llama **"constante de proporcionalidad"**. Por ejemplo:

El modelo **A** tuvo siempre un rendimiento constante porque los cocientes de las cantidades que se corresponden fueron siempre 16.
El rendimiento del modelo **A** es de 16 kilómetros por litro de gasolina.

III. Además de los modelos anteriores, la compañía encontró que los siguientes modelos tuvieron rendimientos constantes:

- El **modelo D** recorrió una distancia de 680 kilómetros y tuvo un consumo de 40 litros de gasolina.
- El **modelo E** recorrió una distancia de 630 kilómetros y tuvo un consumo de 35 litros de gasolina.
- El modelo **F** recorrió una distancia de 192 kilómetros y tuvo un consumo de 12 litros de gasolina.

a) ¿Cuál es el rendimiento que tuvo el modelo **D**? __________

b) ¿Cuál es el rendimiento que tuvo el modelo **E**? __________

c) ¿Cuál es el rendimiento que tuvo el modelo **F**? __________

d) Entre los modelos **A**, **D**, **E** y **F**, ¿cuáles tuvieron el mismo rendimiento? ______

e) ¿Cuál de ellos tuvo el mejor rendimiento? __________

Comparen sus respuestas y comenten cómo las obtuvieron.

>>> A lo que llegamos

Dos relaciones de proporcionalidad directa se pueden comparar usando sus constantes de proporcionalidad o sus cocientes.
Por ejemplo:

- Si un modelo tiene rendimiento de 16 kilómetros por litro de gasolina, entonces tiene el mismo rendimiento que el modelo **A**.
- Si un modelo G tiene rendimiento constante de 17 kilómetros por litro de gasolina, entonces el modelo **G** tiene un mejor rendimiento que el modelo **A**.

>>> Lo que aprendimos

1. Completa la siguiente tabla, en donde se muestra el tiempo y la distancia recorrida por cuatro automóviles. En la última columna se indican los cocientes de las distancias recorridas entre el tiempo que tardaron en recorrerlas. A este cociente se le llama velocidad (en este problema se considera que los automóviles siempre viajaron a velocidad constante).

	Tiempo del recorrido (en horas)	Distancia recorrida (en kilómetros)	Velocidad (en kilómetros por hora)
Automóvil A	3	249	83
Automóvil B	11	924	84
Automóvil C	1	84	84
Automóvil D	7	595	85

a) ¿Cuál automóvil fue a mayor velocidad? ______

b) ¿Cuál automóvil fue a menor velocidad? ______

c) ¿Cuáles automóviles fueron a la misma velocidad? ______ y ______

2. Completa la siguiente tabla en donde se muestra la cantidad de libras esterlinas obtenida al cambiar dólares americanos en cinco casas de cambio distintas.

	Cantidad recibida (en libras)	Cantidad cambiada (en dólares)	Tipo de cambio
Casa de cambio A	145	290	
Casa de cambio B	240	600	
Casa de cambio C	180	414	
Casa de cambio D	195	468	
Casa de cambio E	120	276	

a) ¿Cuál casa de cambio ofrece mejor tipo de cambio de dólares a libras? ______

b) ¿Cuál casa de cambio ofrece el peor tipo de cambio de dólares a libras? ______

c) ¿Cuáles casas de cambio ofrecen el mismo tipo de cambio de dólares a libras? ______

211

Propósito del interactivo. Aprovechando los conceptos de rendimiento y de velocidad que se han visto en la secuencia, en el interactivo se presenta la relación del consumo de gasolina con la velocidad en la que realiza su recorrido, llegando a plantearse el problema de encontrar la velocidad óptima para hacer un recorrido con el menor gasto de gasolina.

Propósito de la actividad. En la situación anterior el cociente entre cantidades correspondientes era el rendimiento del automóvil. En esta situación se sigue trabajando con los cocientes pero tienen otro significado: la velocidad. El cociente que resulta al dividir la distancia recorrida entre el tiempo que toma recorrerla es justamente la manera de calcular la velocidad promedio.

Respuestas.
a) El automóvil D.
b) El automóvil A.
c) El B y el C.

Respuestas.
a) La casa B porque da 2.5 dólares por cada libra.
b) La casa A porque da 2 dólares por cada libra.
c) Las casas C y E.

Propósito de la sesión. Comparar razones en distintas situaciones.
Organización del grupo. Se sugiere trabajar tanto individualmente como en parejas y con todo el grupo.

Propósito de la actividad. Este problema tiene la intención de que los alumnos logren mantener las proporciones de pintura amarilla y roja aunque la cantidad total de la mezcla (que será la pintura naranja) varíe.
Más adelante verán que si en dos mezclas se utilizan los mismos colores en iguales proporciones, tendrán cocientes iguales.

Posibles dificultades. Quizá algunos alumnos respondan que para preparar 12 litros de pintura naranja se necesitan 7 litros de amarilla y 5 litros de roja, es decir, sólo le aumentan un litro a cada color respecto de las cantidades necesarias para preparar 10 litros. Este procedimiento es incorrecto pero no los corrija en este momento, más adelante tendrán oportunidad de hacerlo.

Respuestas.
a) 7.2 litros de pintura amarilla y 4.8 litros de pintura roja.
b) 13.8 litros de pintura amarilla y 9.2 litros de pintura roja.

Propósito de la actividad. Aquí se pretende establecer que el cociente es una forma de medir la proporción de pintura amarilla que hay en la pintura naranja. En el contexto de las mezclas de pintura se le llama "concentración".

Recuerde que.
Una razón es una relación entre dos cantidades. Por ejemplo, puede decirse que:
- hay 6 litros de pintura amarilla por cada 10 de pintura naranja,
- hay 6 litros de pintura amarilla por cada 4 de pintura roja,
- hay 4 litros de pintura roja por cada 10 de pintura naranja.

Un cociente es el resultado de dividir estas cantidades. Siguiendo con el ejemplo anterior:
- la concentración de pintura amarilla en la naranja es de 0.6 (6 ÷ 10),
- la concentración de pintura amarilla comparada con la roja es de 0.666… (4 ÷ 6),
- la concentración de pintura roja en la pintura naranja es de 0.4 (10 ÷ 4).

SESIÓN 2

LA CONCENTRACIÓN DE PINTURA

>>> Para empezar

En la sesión 6 de su libro de **Matemáticas I Volumen I** aprendiste que hay una gran diversidad de colores llamados colores compuestos. Los colores compuestos se pueden obtener mezclando los tres colores primarios: amarillo, azul y rojo.

El color naranja, por ejemplo, se obtiene mezclando amarillo y rojo. Las distintas tonalidades naranja, más claro o más oscuro, dependen de las cantidades de colores amarillo y rojo que se mezclen.

>>> Consideremos lo siguiente

En una escuela se hizo una colecta para comprar pintura y pintar con ella el edificio de la escuela. El color elegido fue el naranja.

Para preparar **10 litros de pintura naranja** del tono elegido se necesitan **6 litros de pintura amarilla** y **4 litros de pintura roja**.

a) ¿Qué cantidades de pintura amarilla y roja se necesitan para obtener **12 litros de pintura naranja** del tono elegido? ______

b) ¿Qué cantidades de pintura amarilla y roja se necesitan para obtener **23 litros de pintura naranja** del tono elegido? ______

Comparen sus respuestas y comenten sus procedimientos.

>>> Manos a la obra

I. Completen la siguiente tabla y encuentren qué cantidad de pintura amarilla se necesita para obtener 12 litros de pintura naranja.

Cantidad de mezcla (pintura naranja) (en litros)	Cantidad de pintura amarilla en la mezcla (en litros)
10	6
1	0.6
12	7.2

Comparen sus tablas y comenten el procedimiento anterior.

Verifiquen su resultado dado en el apartado *Consideremos lo siguiente* con el obtenido al completar la tabla.

II. La **concentración de color amarillo en la pintura naranja** es el cociente de la cantidad de pintura amarilla entre la cantidad de pintura naranja. Por ejemplo, la pintura naranja tiene la siguiente concentración de color amarillo:

$$6 \div 10 = \frac{6}{10} = 0.6$$

a) Completen las siguientes tablas para encontrar las distintas cantidades de pintura naranja (mezcla) y amarilla y las concentraciones correspondientes.

Cantidad de mezcla (en litros)	Cantidad de pintura amarilla en la mezcla (en litros)
10	6
30	18
5	3
25	15
18.3	11

Concentración de pintura amarilla en la pintura naranja
6 ÷ 10
18 ÷ 30
3 ÷ 5
15 ÷ 25
18.3 ÷ 11

Comparen sus tablas y comenten:

b) ¿Serán del mismo tono las mezclas de pintura naranja obtenidas en la tabla anterior?, ¿cómo pueden verificarlo? ____

c) ¿Cuántos litros de pintura roja necesitan para preparar 25 litros de pintura naranja del mismo tono? ____

d) Si se usan 15 litros de pintura amarilla, ¿cuántos litros de pintura roja se deben mezclar para obtener pintura naranja del mismo tono? ____

III. Completen la siguiente tabla para encontrar qué cantidad de pintura roja deben llevar los 23 litros de pintura naranja.

Cantidad de mezcla (pintura naranja) (en litros)	Cantidad de pintura roja en la mezcla (en litros)
10	4
1	
23	9.2

Concentración de pintura roja en la pintura naranja
4 ÷ 10
9.2 ÷ 23 = 0.4

a) ¿Cuál es la concentración de pintura roja en la pintura naranja?

____

b) Verifiquen sus resultados dados en el apartado *Consideremos lo siguiente*.

Comparen sus tablas y comenten:

a) Si en un recipiente se ponen 2 litros de pintura roja, ¿qué cantidad de pintura amarilla se debe usar para que la pintura naranja tenga el tono elegido?

____

213

Posibles dificultades. Pregunte a los alumnos qué cantidad de pintura naranja obtuvieron sabiendo que la mezcla lleva 11 litros de pintura amarilla. Si no logran obtener la respuesta sugiérales ampliar la tabla de la siguiente manera para hallar los dos valores unitarios:

Cantidad pintura naranja	Cantidad pintura amarilla
5	3
1	
	1
	11

De esta manera podrán averiguar que:

- por cada litro de pintura amarilla hay $\frac{5}{3}$ o 1.6… litros de pintura naranja; por lo tanto, cuando en la mezcla hay 11 litros de pintura amarilla la cantidad de pintura naranja serán $\frac{55}{3}$ o 18.3… litros;
- por cada litro de pintura naranja hay 0.6 litros de pintura amarilla, entonces para hallar cuántos litros de pintura naranja habría si en la mezcla hay 11 litros de amarilla, se debe multiplicar por su recíproco, que es $\frac{10}{6}$ (o dividir esa cantidad entre 0.6).

Sugerencia didáctica. Comenten qué significa el número que obtienen en la calculadora al dividir $\frac{55}{3}$ (si quieren expresar el resultado mediante un número decimal).

Respuestas.

b) Son del mismo tono de naranja porque los cocientes (al dividir la cantidad de pintura amarilla entre la cantidad de pintura naranja) son iguales. Es decir, la concentración de pintura amarilla tiene la misma proporción en todas las cantidades de pintura naranja de la tabla.

c) 10 litros.

d) 10 litros.

Posibles dificultades. Aquí también puede proponer a los alumnos una ampliación de la tabla:

Cantidad pintura naranja	Cantidad pintura roja
10	4
1	
23	

Así verán que:

- por cada litro de pintura naranja hay 0.4 litros de pintura roja;
- la constante de proporcionalidad que permite ir de la cantidad de pintura naranja (columna izquierda) a la cantidad de pintura roja (columna roja) es 0.4; por lo tanto, cualquier cantidad de la columna izquierda se multiplica por 0.4 para obtener su correspondiente en la columna derecha. Entonces 23 × 0.4 = 9.2;
- la constante de proporcionalidad hallada es igual al cociente: 0.4.

Respuestas.

a) 3 litros de pintura amarilla.

b) Habría 5 litros de pintura naranja, de la cual 0.4 sería de pintura roja y 0.6 de pintura amarilla.

Propósito del interactivo. Reforzar el concepto de razones equivalentes utilizando la igualación de colores y la determinación de las cantidades de cada color necesarias para obtener una cantidad de pintura.

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que varíen las cantidades de pintura para explorar qué sucede con los colores, cómo se relacionan con la cantidad de pintura que se mezcla.

Sugerencia didáctica. En esta parte se establece el concepto de equivalencia. Comente con los alumnos que todas las cantidades de pintura naranja que tengan una concentración de pintura amarilla de 0.6 tienen el mismo tono, es decir, son equivalentes.

Propósito de la actividad. Aquí se establecerá la comparación de razones: el tono que tenga mayor concentración de pintura amarilla será más claro.

Respuestas.

a) $\frac{13}{20}$ o 0.65.

b) $\frac{27}{45}$ o 0.6.

c) El naranja ocre, porque $\frac{13}{20} > \frac{27}{45}$ o $0.65 > 0.6$.

d) El naranja sol. Habría $\frac{7}{20}$ o 0.35 de litro de pintura amarilla en cada litro de pintura naranja ocre, y $\frac{18}{45}$ o 0.4 litros de pintura amarilla en cada litro de pintura naranja sol. Como $\frac{7}{20} < \frac{18}{45}$ o $0.35 < 0.4$, hay una mayor concentración de pintura amarilla en el tono naranja sol.

>>> A lo que llegamos

En esta situación, la cantidad de pintura naranja está en proporción directa tanto con la cantidad de pintura roja como con la cantidad de pintura amarilla.

Entonces, los **cocientes** de las cantidades de pintura amarilla entre las de pintura naranja son **iguales**. Cada uno de estos cocientes es la **concentración** de la pintura amarilla en la pintura naranja: $\frac{6}{10}$, o sea que, en **10 litros de pintura naranja**, **6 son de pintura amarilla**.

Análogamente, los **cocientes** de la cantidad de pintura roja entre la de pintura naranja son **iguales.** Cada uno de estos cocientes es la **concentración** de pintura roja en la pintura naranja: $\frac{4}{10}$, o sea que, en **10 litros de pintura naranja**, **4 son de pintura roja**.

IV. Las siguientes tablas muestran las cantidades de pintura que hay que mezclar para hacer dos tonos distintos de pintura naranja: naranja ocre y naranja sol.

Pintura amarilla (en litros)	Pintura roja (en litros)	Pintura naranja ocre (en litros)
7	13	20

Pintura amarilla (en litros)	Pintura roja (en litros)	Pintura naranja sol (en litros)
18	27	45

a) ¿Cuál es la concentración de pintura roja en la pintura naranja ocre? (exprésalo como fracción y como decimal)

Fracción ______________ Decimal ______________

b) ¿Cuál es la concentración de pintura roja en la pintura naranja sol? (exprésalo como fracción y como decimal)

Fracción ______________ Decimal ______________

c) ¿Cuál de los dos tonos de naranja tiene una mayor concentración de rojo?

____

d) ¿Cuál de los dos tonos de naranja tiene una mayor concentración de amarillo?

____

>>> A lo que llegamos

Para comparar las concentraciones de un color se pueden **comparar los cocientes** entre las cantidades correspondientes. Por ejemplo: la concentración de pintura amarilla en la pintura **naranja ocre** es menor que la concentración de pintura amarilla en la pintura **naranja sol**:

Concentración de pintura amarilla en la pintura naranja ocre: $\frac{7}{20} = 0.35$

Concentración de pintura amarilla en la pintura naranja sol: $\frac{18}{45} = 0.4$

Comparación de cocientes

La comparación de cocientes te puede ayudar para resolver diferentes tipos de problemas. Las siguientes situaciones son un ejemplo de esto.

Descripción del video. A partir de varios contextos se dan ejemplos de comparaciones de cocientes. Se refuerzan los conceptos y procedimientos vistos a lo largo de la secuencia.

>>> Lo que aprendimos

Resuelve los siguientes problemas:

Integrar al portafolios. Pida a los alumnos que le entreguen una copia de sus respuestas a estos dos problemas y analícelas.

1. Al mezclar distintas cantidades de pintura amarilla y azul se forman diferentes tonos de color verde. Las siguientes tablas muestran las cantidades de pintura que hay que mezclar para hacer dos tonos distintos de pintura verde.

Pintura amarilla (en litros)	Pintura azul (en litros)	Pintura verde botella (en litros)
7	3	10

Pintura amarilla (en litros)	Pintura azul (en litros)	Verde agua (en litros)
18	12	30

a) ¿Cuál de los dos tonos de verde tiene mayor concentración de color azul?

b) ¿Cuál es la concentración de pintura azul en la pintura verde botella?

c) ¿Cuál es la concentración de pintura azul en la pintura verde agua?

Respuestas.

a) En la pintura verde agua.

b) En cada litro de pintura verde botella hay $\frac{3}{10}$ o 0.3 litros de pintura azul.

c) En cada litro de pintura verde agua hay $\frac{12}{30}$ o 0.4 de litros de pintura azul.

2. En una escuela secundaria, 3 de cada 4 alumnos de primer grado hablan un idioma distinto al español; 4 de cada 5 en segundo y 5 de cada 6 en tercero.

¿En cuál de los tres grados la proporción de hablantes de un idioma distinto al español es mayor? ______

Respuesta. En tercer grado. La proporción en primer grado es de 3 de cada 4 alumnos, es decir, $\frac{3}{4}$ de los alumnos hablan un idioma distinto al español; en segundo grado es de $\frac{4}{5}$ y en tercero de $\frac{5}{6}$. Como $\frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \frac{5}{6}$ o $0.75 < 0.8 < 0.83\ldots$ la proporción es mayor en tercer grado.

>>> Para saber más:

Sobre el tipo de cambio entre monedas de distintos países consulta:
http://www.euroinvestor.es/currency/
[Fecha de consulta: 24 de mayo de 2007].

Propósito del programa integrador. Ejemplificar cómo se calculan las medidas de tendencia central de un conjunto de datos agrupados.

Propósito de la sesión. Interpretar y calcular la moda y media de datos agrupados, a partir de porcentajes.

Organización del grupo. Se sugiere que los alumnos trabajen en parejas para resolver la sesión.

Sugerencia didáctica. En la secuencia 38 de primer grado los alumnos trabajaron con el significado de la moda, media y mediana para interpretar y comunicar información sobre un conjunto de datos. Conviene recordarlo para lo que aprenderán en esta secuencia.

Propósito de la actividad. La intención es que los alumnos busquen de qué manera podría calcularse un promedio cuando no se tienen todos los datos uno por uno sino agrupados. Es posible que cometan errores o que no sepan cómo hacerlo, permítales explorar durante un rato el problema y comenten las soluciones que propone cada quien.

Sugerencia didáctica. Acepte dos o tres intervenciones de los alumnos. Anote algunas respuestas en el pizarrón para luego recuperarlas en la discusión o en las conclusiones.
En cada ocasión otorgue la palabra a distintos alumnos, incluyendo a los que no levanten la mano.

SECUENCIA 17

Medidas de tendencia central

En esta secuencia aprenderás a calcular algunas de las medidas de tendencia central cuando un conjunto de datos está agrupado en intervalos.

SESIÓN 1

EL PROMEDIO DEL GRUPO EN EL EXAMEN 1

>>> Para empezar

Cuando se realiza un estudio de una situación o fenómeno se obtiene una cantidad de datos (grande o pequeña) que puede organizarse y presentarse de distintas maneras, en una tabla de frecuencias o en una gráfica (de barras, circular o en un polígono de frecuencias); esto dependerá del tipo de datos que se ha obtenido y de los resultados que se quieren destacar.

Otra manera de presentar los datos es a partir de sus medidas de tendencia central, las cuales proporcionan valores de la media, la mediana y la moda, que permiten resumir y comparar la tendencia de un conjunto o de varios conjuntos de datos para establecer conclusiones.

Recuerden que:

Las medidas de tendencia central son valores numéricos que tienden a localizar, en algún sentido, la parte central de un conjunto de datos. A menudo el término promedio se asocia a estas mediciones. Cada una de las diferentes medidas de tendencia central puede recibir el nombre de valor promedio.

>>> Consideremos lo siguiente

Un grupo de veinte alumnos contestaron un examen de matemáticas con 100 preguntas. Del total de alumnos, el 10% contestó correctamente entre 1 y 25 preguntas de la prueba; el 30%, entre 26 y 50 preguntas; el 50%, entre 51 y 75, y el resto entre 76 y 100.

Se considera que el grupo tuvo un buen desempeño en el examen si su promedio es mayor o igual a 63 aciertos.

¿Fue bueno el desempeño del grupo? ____________ ¿Por qué?

____

Con ayuda de su maestro, comparen el procedimiento que utilizaron para responder la pregunta anterior con los que utilizaron otros compañeros. Comenten:

¿Cuál de los siguientes valores es más conveniente utilizar para determinar si el desempeño que tuvo el grupo fue bueno de acuerdo con lo señalado al principio?

- El intervalo de aciertos en el que hay un mayor porcentaje de alumnos.
- La media aritmética de las cantidades obtenidas por los veinte alumnos.

216

Eje
Manejo de la información
Tema
Representación de la información
Antecedentes
En primer grado los alumnos estudiaron situaciones en las que obtuvieron y analizaron las medidas de tendencia central. Ahora lo harán cuando los datos están agrupados.

Propósitos de la secuencia
Interpretar y calcular las medidas de tendencia central de un conjunto de datos agrupados, considerando de manera especial las propiedades de la media aritmética.

Sesión	Propósitos de la sesión	Recursos		Vínculos
1	**El promedio del grupo en el examen 1** Interpretar y calcular la moda y media de datos agrupados, a partir de porcentajes.		Programa integrador 12	
2	**El promedio del grupo en el examen 2** Comparar el valor de la media aritmética de datos agrupados y el valor de la media aritmética de datos sin agrupar, observar que la primera es representativa de varios conjuntos de datos que tengan la misma frecuencia en cada intervalo.	Interactivo		
3	**Las calorías que consumen los jóvenes** Resolver problemas que implican la determinación del punto medio del intervalo modal (como valor de la moda) y el cálculo de la media de datos agrupados a partir de información representada en polígonos de frecuencias.	Video *"Estadísticas, alimentos y otras situaciones"* Interactivo		Ciencias I secuencia 11

>>> Manos a la obra

I. Completen la siguiente tabla.

Resultados obtenidos por el grupo A en el examen de matemáticas		
Aciertos (intervalo)	Porcentaje de alumnos	Número de alumnos (frecuencia)
1-25	10%	2
26-50	30%	6
51-70	50%	10
76-100	10 %	2
Totales	100 %	20

a) ¿Cuál es el intervalo de aciertos en el que hay más alumnos? ______

b) ¿Cuántos alumnos tuvieron entre 1 y 50 aciertos en el examen? ______

c) Con la información que tienen, ¿pueden decir cuántos alumnos respondieron correctamente a 63 preguntas? ______ ¿Y cuántos respondieron correctamente a más de 63 preguntas?______ ¿Por qué? ______

Recuerden que:

Cuando un conjunto de datos está organizado en intervalos iguales, cada intervalo tiene un límite inferior y uno superior.

El tamaño de un intervalo es igual a la diferencia entre dos sucesivos límites inferiores o superiores.

Cada intervalo puede ser identificado y representado por su límite inferior y superior, pero también podemos utilizar el punto medio del intervalo, *que se obtiene con sólo sumar los límites inferior y superior del intervalo y dividir esta suma entre 2. Por ejemplo, el punto medio del primer intervalo es:* $\frac{(1 + 25)}{2} = \frac{26}{2} = 13$.

Ese valor permite efectuar operaciones aritméticas con intervalos.

Propósito de la actividad. Al llenar esta tabla los estudiantes podrán conocer varios datos; por ejemplo, cuántos alumnos tuvieron menos de 50 aciertos, cuántos tuvieron más de 76 aciertos o cuántos tuvieron al menos 51 aciertos. Lo que no pueden saber es exactamente cuántos aciertos tuvo cada quién, por lo que la forma en la que han aprendido a calcular el promedio no les resulta útil aquí.
Para poder hacerlo se necesita encontrar un valor representativo de cada intervalo, que es su punto medio. Cuando contesten las preguntas con los incisos a), b) y c) lean juntos la siguiente información y coméntenla.

Respuestas.
a) En el de 51 a 75 aciertos.
b) 8 alumnos.
c) No se puede saber con exactitud porque los datos están agrupados.

Recuerde que. Hallar el punto medio de cada intervalo no quiere decir que sepamos que los dos alumnos que están en el primer intervalo obtuvieron exactamente 13 aciertos, ni que es el promedio del número de aciertos que obtuvieron esos dos alumnos. Lo que significa es que al desconocer los valores uno por uno se toma como valor representativo el punto medio del intervalo y con él se pueden efectuar otros cálculos (como el promedio). Sin embargo, es posible que los datos de hecho fueran 5 y 7 aciertos, lo que daría 6 de promedio en ese intervalo. Tomar el punto medio como valor representativo equivale, en cierta manera, a hacer una estimación.
Coméntelo con los alumnos y póngales algunos ejemplos.

Propósito de la actividad. En esta tabla los estudiantes calcularán cuántos aciertos obtuvieron en cada intervalo, es decir, tomando como "número de aciertos" el punto medio del intervalo se multiplica por la frecuencia (cuántos alumnos están en ese intervalo). Esto puede interpretarse así: se puede estimar que la suma del número de aciertos que obtuvieron los dos alumnos que se encuentran en el primer intervalo es 26.

Respuestas.
a) 51-75, hay 10 alumnos en ese intervalo y el punto medio es 63.
c) 20 alumnos.
d) 1 060 aciertos.
e) La media aritmética (promedio) es 53 (1060 ÷ 20). El grupo no tuvo un buen desempeño porque se necesitaba que la media aritmética fuera de al menos 63 aciertos.

Sugerencia didáctica. Cuando terminen de contestar estas preguntas, plantee a los alumnos las siguientes:
- Hubo 10 alumnos (la mitad del grupo) que obtuvieron entre 51 y 75 aciertos, y el punto medio de ese intervalo es 63 ¿puede considerarse que 63 es la media aritmética del grupo?, ¿por qué?
- ¿Cuántos aciertos tendría que haber obtenido todo el grupo para tener una media aritmética de 63?

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que copien esta información en sus cuadernos y aclare dudas si es necesario.

II. Completen la siguiente tabla y, luego contesten las preguntas de los incisos.

Aciertos		Número de alumnos (frecuencia)	Aciertos × número de alumnos (punto medio × frecuencia)
Intervalo	Punto medio del intervalo		
1-25	13	2	13 × 2 = 26
26-50	38	6	38 × 6 = 228
51-75	63	10	63 × 10 = 630
76-100	88	2	88 × 2 = 176
Total		20	228 + 630 + 176 = 1 060

En el intervalo 1-25 su punto medio es 13 y su frecuencia 2, lo que podemos interpretar de las dos siguientes maneras:

En el examen de matemáticas hubo dos alumnos que obtuvieron entre 1 y 25 aciertos.

En el examen de matemáticas hubo dos alumnos que obtuvieron 13 aciertos.

a) ¿Cuál es el intervalo que tiene el mayor número de alumnos (mayor frecuencia)? ________ ¿Cuántos alumnos obtuvieron ese intervalo de aciertos? ________ ¿Cuál es el punto medio de intervalo en el que se tiene el mayor número de alumnos (frecuencia)? ________

b) Escriban, en su cuaderno, cómo interpretarían estos datos.

c) ¿Cuántos alumnos son en total (frecuencia total)? ________

d) ¿Cuál es la suma de los aciertos de todos los alumnos? ________

e) ¿Cuál es la media aritmética del número de aciertos que obtuvo el grupo? ________ ¿Consideran que el grupo tuvo un buen desempeño en el examen de matemáticas? ________ ¿Por qué? ________

>>> A lo que llegamos

Cuando un conjunto de datos está organizado en intervalos de igual tamaño, al que tiene mayor frecuencia se le llama **intervalo modal** y su punto medio se puede considerar que es el valor de la moda.

218

Una vez que se tiene el punto medio de cada intervalo se puede obtener la **media aritmética** de todo el conjunto de datos agrupados. Para ello, primero se multiplica el punto medio de cada intervalo por su frecuencia, luego se suman los productos y el total se divide entre el número de datos. Por ejemplo:

Intervalo	Punto medio	Frecuencia	Producto (punto medio × frecuencia)
0-6	3	50	150
7-13	10	100	1000
14-20	17	50	850
Total		200	2000

Media aritmética= $\frac{2000}{200}$ =10

III. Completen los siguientes párrafos, que corresponden a dos formas diferentes de reportar los resultados obtenidos por el grupo. Utilicen los valores de la moda, intervalo modal y media aritmética que calcularon en la actividad anterior, según se señala en cada inciso.

a) Utilicen el valor de la media aritmética.

El desempeño del grupo en el examen de matemáticas fue Insuficiente
excelente/bueno/regular/insuficiente

debido a que el promedio de aciertos que obtuvieron los alumnos fue de 53 ,
(media aritmética)

que es menor *al promedio de 63 aciertos que se señala como referencia.*
mayor/igual/menor

b) Otra forma de dar a conocer el desempeño de los alumnos es a partir del número de aciertos en que hubo mayor frecuencia, es decir, el intervalo modal o la moda.

El desempeño del grupo en el examen de matemáticas fue bueno
excelente/bueno/regular/insuficiente

debido a que el número de aciertos con mayor frecuencia fue de 63 aciertos ,
(moda)

que es igual *al promedio de 63 aciertos que se señala como referencia,*
mayor/igual/menor

ya que 10 *alumnos obtuvieron de* 51 *a* 75 *aciertos.*
(intervalo modal)

219

Propósito de la actividad. La actividad pretende que los alumnos aprendan a dar conclusiones basadas en los resultados que obtuvieron, dándole sentido al contexto en que se está desarrollando la sesión (exámenes de matemáticas y desempeño académico) como un punto básico e importante que debe estar presente en toda tarea estadística.

Respuestas. El del inciso a), porque la media aritmética incluye a todos los alumnos del grupo.

Propósito de la actividad. Al analizar estas afirmaciones como posibles justificaciones se concluye la sesión en dos sentidos: el primero es responder las preguntas planteadas en el apartado *Consideremos lo siguiente*, el segundo es que aquí se aborda el conocimiento que se quiere que los alumnos aprendan, en este caso, obtener el intervalo modal, el punto medio del intervalo modal y la media aritmética de datos agrupados.

Sugerencia didáctica. Utilice las respuestas que anotó en el pizarrón, según se recomendó al principio de esta sesión, y compárenlas con las respuestas que han obtenido en el *Manos a la obra*; si fuera necesario, lean nuevamente los recuadros de *A lo que llegamos* para dar respuesta al inciso c).

Posibles dificultades. Quizá algunos alumnos consideren que da igual elegir la media aritmética o el intervalo modal debido a que ambas se pueden calcular, pero dada la situación que se quiere determinar (conocer el desempeño del grupo a partir del número de aciertos en el examen) la media aritmética es más apropiada porque considera a todos los miembros del grupo.

Propósito de la sesión: Comparar el valor de la media aritmética de datos agrupados y el valor de la media aritmética de datos sin agrupar; observar que la primera es representativa de varios conjuntos de datos que tengan la misma frecuencia en cada intervalo.

Organización del grupo. A lo largo de la sesión se sugiere que los alumnos trabajen tanto individualmente como en parejas, y que comenten sus resultados con todo el grupo.

Comparen y comenten sus respuestas con las de sus compañeros.

c) ¿Cuál de los dos valores, media aritmética o moda, consideras que es correcto utilizar para presentar los resultados de este grupo? ______

Marquen con una ✓ la afirmación que consideren que justifica su respuesta anterior.

- [x] El primer resultado, porque el valor de la media aritmética de datos agrupados toma en cuenta el número de aciertos que obtuvieron los veinte alumnos.
- [ ] El segundo resultado, porque para obtener el valor de la moda de datos agrupados se toma en cuenta entre qué número de aciertos se concentra el mayor número de alumnos.
- [ ] Los dos resultados, porque tanto la media aritmética como la moda o el intervalo modal son medidas de tendencia central y, en este caso, se pueden calcular para determinar el desempeño del grupo.

SESIÓN 2

EL PROMEDIO DEL GRUPO EN EL EXAMEN 2

>>> Para empezar

En la sesión anterior calculaste la media aritmética del número de aciertos que obtuvieron los veinte alumnos del grupo A, al presentar un examen de matemáticas. También determinaron el intervalo de aciertos que con mayor frecuencia obtienen los alumnos. En esta sesión utilizarás esos valores para compararlos con los valores de la media y moda de datos sin agrupar.

>>> Consideremos lo siguiente

Completen el siguiente cuadro con los valores de las medidas de tendencia central obtenidos en la sesión anterior.

Intervalo modal del número de aciertos	Punto medio del intervalo modal	Media aritmética del número de aciertos
51-75	63	53

El grupo está inconforme con estos valores que se obtuvieron al agrupar los datos. Sugieren que es mejor tomar los datos sin agrupar para determinar su desempeño en el examen de matemáticas.

En la siguiente tabla se ha incluido el número de aciertos que cada uno de los veinte alumnos obtuvo en ese examen.

Propósito del interactivo. Interpretar y calcular las medidas de tendencia central de un conjunto de datos agrupados.

Número de aciertos en el examen de matemáticas por alumno del grupo A	
Intervalo	**Datos sin agrupar**
1-25	11, 24
26-50	26, 30, 32, 32, 44, 48
51-75	53, 55, 55, 55, 60, 66, 68, 68, 70, 73
76-100	80, 97

¿Qué tan diferentes son los valores de la media de los datos sin agrupar con respecto de los agrupados? ______ ¿Será significativa esa diferencia como para rechazar los valores obtenidos al agrupar los datos? ______

Sugerencia didáctica. Estas preguntas no son fáciles de contestar y los alumnos quizá no se animen a hacerlo. Lo importante en este punto es que reconozcan el problema (si hay o no diferencia entre los valores obtenidos cuando los datos están agrupados y cuando están sin agrupar) y que puedan dar una opinión al respecto o abiertamente decir "no lo sé". En los siguientes apartados abordarán dicho problema.

¿Qué sucede con los valores de la moda obtenidos de estas dos maneras? ¿Son iguales o son diferentes? ______

Comparen y comenten sus respuestas con las de sus compañeros.

Si se dijo que un grupo tiene un buen desempeño cuando el promedio es mayor o igual a 63 aciertos, ¿cómo fue el desempeño del grupo de acuerdo con el valor de la media aritmética de datos sin agrupar? ______

>>> Manos a la obra

I. Consideren la tabla con el número de aciertos de cada uno de los veinte alumnos para responder las siguientes preguntas.

a) ¿Cuál es el número de aciertos que más alumnos obtuvieron? ______

b) Compara este número con el punto medio del intervalo modal, ¿son iguales o diferentes? ______ ¿Ese número está dentro del intervalo modal? ______

Recuerden que:

La moda de un conjunto de datos sin agrupar es el dato que tiene mayor frecuencia.

Respuesta. El desempeño sigue siendo malo, ya que obtuvieron menos de 63 aciertos como media aritmética.

Propósito de la actividad. Obtener la moda y media aritmética de datos sin agrupar.

Respuestas.
a) 55 aciertos
b) Son diferentes, el número sí está dentro del intervalo modal (que es 51-75).
c) Ninguno tuvo exactamente 63 aciertos, pero 7 tuvieron más de 63.
d) 1 047 ÷ 20 = 52.35, sí es un valor diferente al de la media aritmética de datos agrupados (53).

c) ¿Cuántos alumnos respondieron correctamente al menos 63 preguntas? ______

d) En este conjunto de datos sin agrupar, ¿cuál es el valor de la media aritmética? ______ ¿Este valor es diferente al valor de la media aritmética de datos agrupados? ______

e) Completen el siguiente párrafo. Utilicen el valor de la media aritmética de datos sin agrupar.

El desempeño del grupo A en el examen de matemáticas fue insuficiente
(excelente/bueno/regular/insuficiente)

debido a que el promedio de aciertos que obtuvieron los alumnos fue de 52.35,
(media aritmética)

que es menor *al promedio de 63 aciertos que se señala como referencia.*
(mayor/igual/menor)

Propósito de la actividad. Aunque en los dos grupos las frecuencias (número de aciertos en cada intervalo) coincidan, las calificaciones de cada alumno son distintas. Si los resultados de ambos grupos se analizaran agrupando los datos en los mismos intervalos se obtendría la misma media aritmética, lo que no sucedería conociendo cada uno de los datos.
Al analizar los datos de esta tabla se pretende que los alumnos se den cuenta de que al agruparlos se pueden hacer afirmaciones sobre tendencias o estimaciones, pero no se pueden obtener valores "exactos".

Ahora, consideren que otro grupo, también de veinte alumnos, obtuvieron el siguiente número de aciertos:

Número de aciertos en el examen por alumno del grupo B (datos sin agrupar)
15, 20 , 28, 32, 32, 32, 47, 52, 60, 60, 65, 65, 70, 70, 72,72,75,75, 60, 60, 65, 65, 70, 70, 72, 72, 75, 75, 90, 100

Al agrupar los datos en el mismo número de intervalos del grupo A, los porcentajes de alumnos coinciden.

Aciertos (intervalos)	Porcentaje de alumnos	Número de aciertos en el examen por alumno del grupo B (datos sin agrupar)
1-25	10 %	15, 20
26-50	30 %	28, 32, 32, 32, 47, 52
51-75	50 %	60, 60, 65, 65, 70, 70, 72, 72, 75, 75
76-100	10 %	90,100

Sugerencia didáctica. Acepte dos o tres intervenciones de los alumnos. Anote algunas respuestas en el pizarrón para luego recuperarlas en la discusión o en las conclusiones.
En cada ocasión otorgue la palabra a distintos alumnos, incluyendo a los que no levanten la mano.

f) ¿Cuál de los dos grupos, el A o el B, tuvo un mejor desempeño en el examen de matemáticas? ______

II. Utilicen la información que aparece en la tabla anterior para contestar las siguientes preguntas.

a) En el conjunto de datos sin agrupar, ¿cuál es el valor de la moda? ______

b) Si se consideran los datos agrupados, ¿cuál es el intervalo modal? ______
¿y cuál es el punto medio de ese intervalo? ______

c) Compara el valor de la moda de los datos sin agrupar con el punto medio del intervalo modal, ¿son iguales o diferentes? ______

d) ¿El valor de la moda de los datos sin agrupar está dentro del intervalo modal?
______

e) ¿Cuál es el valor de la media aritmética sin agrupar los datos? ______

f) Completen el siguiente párrafo. Utilicen el valor de la media aritmética de los datos del grupo B.

El desempeño del grupo B en el examen de matemáticas fue insuficiente
excelente/bueno/regular/insuficiente

debido a que el promedio de aciertos que obtuvieron los alumnos fue de 52.1 ,
(media aritmética)

que es menor *al promedio de 63 aciertos que se señala como referencia.*
mayor/igual/menor

g) Si consideran los datos agrupados, ¿cuál es el valor de la media aritmética? ______

h) Comparen los valores de la media aritmética de los datos agrupados y sin agrupar. ¿Son iguales o diferentes? ______ Si son diferentes, ¿es significativa esta diferencia? ______

i) Si comparan los valores de las medias aritméticas de los datos sin agrupar de los dos grupos, A y B, ¿cuál de los dos grupos tiene mejor promedio? ______
¿Alguno de los dos grupos logró tener un buen desempeño? (recuerden que un grupo tiene un buen desempeño si su promedio de aciertos es igual o mayor a 63).
______

j) Comparen los valores de la media aritmética de datos agrupados de los dos grupos. ¿Son iguales o diferentes? ______ Si son diferentes, ¿qué grupo tuvo mejor desempeño? ______

223

Respuestas.

a) 32.
b) Es 51-75 cuyo punto medio es 63.
c) Son diferentes.
d) No está dentro del intervalo modal, sino en un intervalo anterior, el de 26-50.
e) 52.1.
g) 53.
h) Son diferentes, la diferencia es de 0.9, puede considerarse un acierto menos.
i) El grupo A, porque obtuvo 52.35, pero de todos modos no tiene buen desempeño.
j) Las medias aritméticas de los datos agrupados son iguales. Si se comparan así, puede decirse que ambos grupos tienen el mismo desempeño.

Propósito de la actividad. Dar conclusiones sobre lo siguiente:

- los valores de la media aritmética de datos sin agrupar tienen mayor precisión,
- la media de datos agrupados presenta la tendencia de esa situación, pero también la de varios conjuntos del mismo número de datos y frecuencias. Entonces es más representativa.

Sugerencia didáctica. Comente con los alumnos la importancia de tomar conciencia de lo que se puede saber cuando los datos están agrupados y cuando no lo están, porque les ayudará a comprender otros conceptos, como la diferencia entre lo que es una muestra y lo que es una población.

Integrar al portafolios. Pida a los alumnos que "inventen" una situación con las siguientes características:

- dos grupos, cada uno de 20 alumnos, hicieron un examen de matemáticas;
- el examen tenía 100 preguntas, por lo que 100 es el número máximo de aciertos que fue posible obtener;
- el número de aciertos que obtuvieron los alumnos de un grupo fue distinto al que obtuvieron los del otro grupo, sin embargo, ambos grupos obtuvieron los mismos valores al agrupar sus datos.

Explíqueles que lo que tienen que entregar son cuatro tablas similares a las de esta secuencia:

- Número de aciertos que obtuvo el grupo A sin agrupar.
- Número de aciertos que obtuvo el grupo B sin agrupar.
- Número de aciertos que obtuvo el grupo A con datos agrupados.
- Número de aciertos que obtuvo el grupo B con datos agrupados.

En cada tabla deben calcular la moda, el intervalo modal, el punto medio del intervalo modal y la media aritmética.

Comparen y comenten sus respuestas con las de sus compañeros.

a) Completen el siguiente párrafo a manera de conclusión, utilizando el valor de la media aritmética de datos agrupados de ambos grupos.

El desempeño de los grupos A y B en el examen de matemáticas fue Insuficiente
excelente/bueno/regular/insuficiente

debido a que el promedio de aciertos que obtuvieron los alumnos fue de 53 ,
(media aritmética)

que es menor *al promedio de 63 aciertos que se señala como referencia.*
mayor/igual/menor

>>> A lo que llegamos

Cuando un conjunto de datos está organizado en intervalos, estos intervalos están formados por varios datos individuales, y la frecuencia del intervalo se obtiene contando el número de datos individuales que hay en el intervalo. Por esta razón el valor de la moda de datos sin agrupar no necesariamente está incluido en el intervalo modal.

Por ejemplo:

Intervalo	Punto medio	Frecuencia	Grupo A (datos sin agrupar)	Grupo B (datos sin agrupar)
60-62	61	3	60, 60, 62	60, 60, 60
63-65	64	4	63, 64, 65, 65	63, 64, 64, 65
66-68	67	5	66, 66, 67, 67, 68	67, 67, 67, 68, 68,
69-71	70	3	71, 71, 71	69, 69, 70

El valor de la moda de datos **sin agrupar** del grupo A es **71** y el del grupo B es **67**.

El intervalo modal para ambos grupos es **66-68** y el **punto medio del intervalo modal** es **67**.

Observen que el valor de la moda (71) del grupo A no está incluido en el intervalo modal (66-68), mientras que el valor de la moda del grupo B, además de estar incluido, es el mismo valor del punto medio del intervalo modal.

224

La **media aritmética de un conjunto de datos agrupados** es un valor que puede ser igual, menor o mayor al valor de la media aritmética de los datos sin agrupar, debido a que en su cálculo se utiliza el punto medio de cada intervalo.

Por otra parte, el valor de la media aritmética de datos agrupados es representante de cualquier conjunto de datos que tenga los mismos intervalos y las mismas frecuencias en cada intervalo.

Por ejemplo: considerando los datos de la tabla anterior, tenemos los siguientes valores.

Media de datos agrupados = $\frac{984}{15}$ = **65.6**

Media de datos del grupo A sin agrupar = $\frac{986}{15}$ = **65.7**

Media de datos del grupo B sin agrupar = $\frac{980}{15}$ = **65.33**

Sugerencia didáctica. Analicen juntos el ejemplo de *A lo que llegamos*. Anote la tabla en el pizarrón y vayan leyendo la información.

>>> Lo que aprendimos

1. Ahora utiliza los siguientes datos sin agrupar y completa la tabla en la que se ha cambiado el tamaño de los intervalos de 25 a 20.

Propósito de la actividad. Con esta actividad se pretende que los alumnos analicen los cambios que se dan en la media aritmética al cambiar el tamaño de los intervalos.

Número de aciertos en el examen por alumno del grupo A (datos sin agrupar)
11, 24, 26, 30, 32, 32, 44, 48, 53, 55, 55, 55, 60, 66, 68, 68, 70, 73, 80, 97

Aciertos		Número de alumnos		Aciertos x número de alumnos (punto medio × frecuencia)
Intervalo	Punto medio del intervalo	Frecuencia	Porcentaje	
1-20	10.5	1	5	10.5 × 1 = 10.5
21-40	30.5	5	25	30.5 × 5 = 152.5
41-60	50.5	7	35	50.5 × 7 = 353.5
61-80	70.5	6	30	70.5 × 6 = 423
81-100	90.5	1	5	90.5 × 1 = 90.5
Total		20	100%	10.5 + 52.5 + 353.5 + 423 + 90.5 = 1 030

Respuestas.

a) 1 030 ÷ 20 = 51.5.
b) 52.35 – 51.5 = 0.85.
d) La diferencia de la media aritmética de los datos agrupados con respecto a la obtenida con los valores reales fue menor cuando los datos se agruparon en intervalos de tamaño 25. Ese tamaño de intervalo representó mejor la situación.

Sugerencia didáctica. Comenten el asunto del tamaño de los intervalos y su capacidad de representar una situación. Es importante que los alumnos no piensen que la estadística es imprecisa y engañosa, porque aunque parece subjetiva, tiene sustento, y con base en la información que proporciona es posible describir y/o predecir con cierta exactitud el comportamiento de una situación. Diga a los alumnos que se debe ser responsable y cuidadoso al tomar la decisión de cómo agrupar los datos y qué medida utilizar, así como qué gráfica es más adecuada, a diferencia de utilizar mecánicamente una fórmula o procedimiento.

Propósito de la actividad. Con este problema se pretende que en una situación real, los alumnos recopilen, organicen y determinen cuál es la manera más conveniente de tratar y presentar los datos (estas tareas las han estado desarrollando desde el grado anterior). Para centrar la atención en ello y evitar que los alumnos se distraigan o les tome mucho tiempo hacer las operaciones, dígales que usen calculadora o, si se puede, el programa Excel.

Sugerencia didáctica. No limite el trabajo de los alumnos a simplemente calcular y presentar, cuestiónelos sobre la manera en que están organizando los resultados y pídales que justifiquen lo que están haciendo; por ejemplo, pregúnteles qué sucede si algún alumno tiene 0 de calificación (si no lo saben, dígales que revisen la secuencia 38 de primer grado).
Esta actividad deben realizarla en grupo. Anote las calificaciones en el pizarrón y copie las tablas de los incisos b) y c) para que las vayan llenando juntos.

Recuerda que:

La media aritmética es una medida que se afecta fácilmente por la presencia de valores extremos debido a que, para realizar su cálculo, se consideran todos los valores.

a) Al cambiar el tamaño de los intervalos, ¿cuál es el valor de la media aritmética del número de aciertos obtenidos por los alumnos? ______

b) ¿Cuál es la diferencia entre la media aritmética de los datos sin agrupar y la media aritmética de los datos agrupados en intervalos de tamaño 20? ______

c) Completa el siguiente cuadro:

Media aritmética del número de aciertos sin agrupar	Media aritmética del número de aciertos agrupados en intervalos de tamaño 25	Media aritmética del número de aciertos agrupados en intervalos de tamaño 20
52.35	53	51.5

d) ¿Cuál de los valores de las medias aritméticas de datos agrupados consideras que representa mejor la situación? ______ ¿Por qué? ______

2. Comenten con sus compañeros y con el profesor cuál podría ser el valor de la media aritmética de sus calificaciones obtenidas en el examen de matemáticas en el primer bimestre, para considerar que tuvieron un buen desempeño. Anoten en el siguiente recuadro el valor que acordaron sería el referente para determinar el desempeño del grupo.

a) Reúnan las calificaciones que obtuvieron todos los alumnos de su grupo en el examen del primer bimestre de matemáticas y anótenlas en el siguiente recuadro.

b) Calculen y anoten el valor de la media que obtuvieron. Usen una calculadora para realizar las operaciones.

Resumen de las calificaciones de matemáticas obtenidas por el grupo ______ correspondientes al examen del primer bimestre.	
Media aritmética	
Moda	

c) Completen la siguiente tabla con las frecuencias y puntos medios que corresponden a sus calificaciones agrupadas en intervalos. Usen una calculadora para realizar las operaciones.

Calificaciones	Número de alumnos (frecuencia)	Calificación representativa (punto medio)	Calif. representativa × número de alumnos Punto medio × frecuencia
0-2.0			
2.1-4.0			
4.1-6.0			
6.1-8.0			
8.1-10.0			

d) Si un compañero dice que obtuvo 6.0 de calificación, ¿en qué intervalo lo anotarían? ____________

e) Si en el intervalo 0-2.0 hubo tres alumnos con 1.5, dos alumnos con 1.0 y dos alumnos con 0, ¿la frecuencia que se deberá anotar es, 5 o 7? ____________

¿Por qué? ____________

f) Si en el intervalo de 4.1 a 6.0 se consideran las calificaciones de 4.1 a 6, ¿cuál es el punto medio de ese intervalo? ____________

¿Qué significado tiene ese valor? ____________

g) Completen el siguiente cuadro.

Media aritmética de las calificaciones sin agrupar	Media aritmética de las calificaciones agrupadas	Diferencia

227

Respuestas.
d) En el tercero (de 4.1 a 6.0).
e) 7, porque 0 es la calificación que obtuvieron esos dos alumnos y sí se debe contar.
f) El punto medio del intervalo es 5.05 y es la calificación representativa de ese intervalo.

Posibles dificultades. Tal vez algunos alumnos piensen que en el inciso e) sea más conveniente poner 5 en la frecuencia porque los ceros no suman puntos. Pregúnteles qué sucedería si se pusiera 5 al sumar las frecuencias, se deben dar cuenta que se obtendría una frecuencia total menor al número de alumnos que participaron en el examen; la siguiente pregunta que puede plantearles es si cambia el valor de la media aritmética. Si aún hay alumnos que tienen dudas al calcular la media aritmética, pídales que la obtengan considerando la frecuencia 5 y 7 de ese intervalo y vean los cambios que ocurren.

h) ¿Qué calificación obtuviste en el examen de matemáticas del primer bimestre? ______ ¿Cuál es la diferencia que hay entre tu calificación y la media aritmética de las calificaciones del examen sin agrupar? ______ ¿Y cuál es la diferencia con respecto a la media aritmética de las calificaciones agrupadas? ______

i) Otro aspecto que se puede analizar en esta situación es la moda. Completen el siguiente cuadro.

Moda de las calificaciones sin agrupar	Intervalo modal de las calificaciones	Punto medio del intervalo modal

Comenten con sus compañeros y con el profesor los resultados que obtuvieron al recopilar, organizar y analizar sus calificaciones.

a) Completen el siguiente párrafo. Deberán utilizar el valor referente de la media aritmética de sus calificaciones que acordaron al principio de esta actividad y los valores que obtuvieron en esta actividad.

El desempeño de nuestro grupo en el examen de matemáticas fue ______ (excelente/bueno/regular/insuficiente) *debido a que la calificación promedio que obtuvimos fue de* ______ (media aritmética), *que es* ______ (mayor/igual/menor) *a la calificación promedio de* ______ *que señalamos como referente. Podemos decir que el* ______ (frecuencia mayor en forma de %) *% de los alumnos obtuvieron* ______ (punto medio del intervalo modal) *de calificación, por lo que es la calificación que más alumnos obtuvieron.*

SESIÓN 3

LAS CALORÍAS QUE CONSUMEN LOS JÓVENES

>>> Para empezar

Estadísticas, alimentos y otras situaciones

Conexión con Ciencias I
Secuencia 11: ¿Cómo usa mi cuerpo lo que como?

En la secuencia 11 **¿Cómo usa mi cuerpo lo que como?** de su libro **Ciencias I Volumen I** estudiaste las características de una alimentación suficiente, variada, equilibrada e higiénica.

228

Propósito de la sesión. Resolver problemas que implican la determinación del punto medio del intervalo modal (como valor de la moda) y el cálculo de la media de datos agrupados a partir de información representada en polígonos de frecuencias.

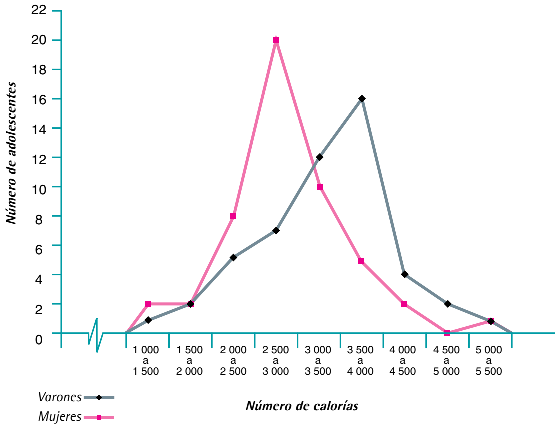
Organización del grupo. En esta sesión hay momentos de trabajo individual y en parejas.

Descripción del video. Se muestran varias situaciones en las cuales se utilizan las medidas de tendencia central para analizar datos y presentar resultados. Se dan estadísticas reales obtenidas del CENEVAL y el INEGI para ejemplificar su uso, en particular para destacar las propiedades de la media aritmética.

Sugerencia didáctica. Si lo considera necesario, revise las secuencias 11 y 12 del libro de *Ciencias I* para ayudar a los alumnos con las dudas que tuvieran sobre el contexto que se utiliza en las sesiones 3 y 4.

>>> Consideremos lo siguiente

En una escuela se organizó una campaña de nutrición. La nutrióloga responsable de la campaña realizó un estudio de los patrones alimenticios de 100 adolescentes de 13 años de edad (50 varones y 50 mujeres). Los resultados que encontró sobre uno de los aspectos del estudio se muestran en la siguiente gráfica.



a) ¿Quiénes consumen mayor número de calorías diariamente, las mujeres o los varones? ____________________

b) ¿Cuál es la media aritmética de calorías que consumen diariamente las mujeres? ____________ ¿Y de los varones? ____________ ¿Y de todos? ____________

c) ¿Cuál fue el número de calorías consumidas con mayor frecuencia por las mujeres? ____________ ¿Y cuál fue el de los varones? ____________

Comparen y comenten sus respuestas con las de sus compañeros.

a) Si comparamos el número de calorías promedio y el número de calorías que más mujeres consumen, ¿estas cantidades se encuentran en el mismo intervalo? ________ ¿Sucede lo mismo en el caso de los varones? ____________

229

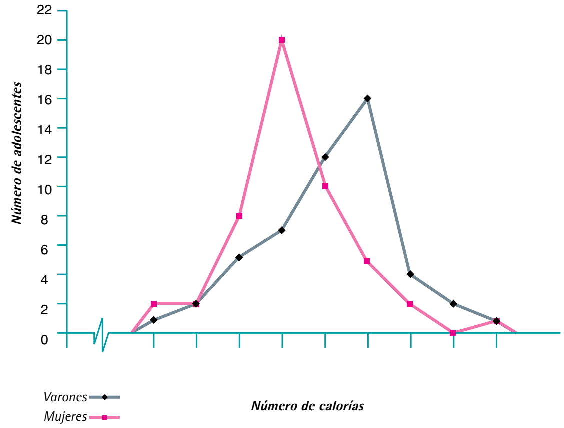
Sugerencia didáctica. Los alumnos ya saben cómo se calcula la media aritmética de datos agrupados, déles suficiente tiempo, ya que deben calcular tres medias.
Usted puede ayudarles a leer la gráfica si les pregunta cosas como:

- ¿Cómo se identifican las calorías que consumieron las mujeres?
- ¿Cuál es la escala que tienen los ejes?

>>> Manos a la obra

I. Observen el polígono de frecuencias y contesten las siguientes preguntas.

Número de calorías consumidas diariamente por adolescentes de 13 años.



Respuestas.

a) 500 y 4 000 calorías al día y 20 mujeres consumen entre 2 500 y 3 000.

b) 3750 calorías por día, 2 750 calorías por día.

c) Los puntos son 1 750, 2 250, 2 750, 3 250, 3 750, 4 250, 4 750, 5 250.

a) ¿Cuántos varones consumen entre 3 500 y 4 000 calorías al día? ______

¿Y cuántas mujeres consumen entre 2 500 y 3 000 calorías diarias? ______

b) En el caso del polígono de frecuencias que muestra los resultados de los varones, ¿cuál es el valor del punto medio del intervalo con mayor frecuencia? ______

Y en el caso del de las mujeres, ¿cuál es el valor del punto medio del intervalo con mayor frecuencia? ______

c) ¿Cuáles son los puntos medios de los demás intervalos? Anótenlos al lado de la frecuencia que señala cada punto en la gráfica.

Como ven, otra forma de construir la gráfica es a partir de los puntos medios de cada intervalo y sus frecuencias. Con esa misma información es posible construir la tabla de frecuencias y calcular la media aritmética de estos datos.

230

II. Completen la siguiente tabla tomando como base los datos de la gráfica anterior. Utilicen una calculadora.

Número de calorías		Varones		Mujeres	
Intervalo	Punto medio del intervalo	Frecuencia	(punto medio × frecuencia)	Frecuencia	(punto medio × frecuencia)
1000-1500	1250	1	(1250 × 1) = 1250	1	(1250 × 2) = 2500
1 500-2 000	1 750	2	(1 750 x 2) = 3 500	2	(1750 x 2) = 3 500
2 000-2 500	2 250	5	(2 250 x 5) = 11 250	8	(2 250 x 8) = 18 000
2 500-3 000	2 750	7	(2 750 x 7) = 19 250	20	(2 750 x 20) = 55 000
3 000-3 500	3 250	12	(3 250 x 12) = 39 000	10	(3 250 x 10) = 32 500
3 500-4 000	3 750	16	(3 750 x 16) = 60 000	5	(3 750 x 5) = 18 750
4 000-4 500	4 250	4	(4 250 x 4) = 17 000	2	(4 250 x 2) = 8 500
4 500-5 000	4 750	2	(4 750 x 2) = 9 500	0	(4 750 x 0) = 0
5 000-5 500	5 250	1	(5 250 x 1) = 5 250	1	(5 250 x 1) = 5 250
Total		50	166 000	50	144 000

a) ¿Cuál es el número de calorías diarias que consumen con mayor frecuencia las mujeres? ________ ¿Y cuál es el de los varones? ________

b) ¿Cuál es la media aritmética de las calorías que consumen los varones? ________ ¿Y la de las mujeres? ________

c) ¿Cómo obtendrían la media aritmética de los 100 adolescentes? ________

III. Completen la siguiente tabla.

Número de calorías		Adolescentes			
Intervalo	Punto medio del intervalo	Frecuencia			(punto medio × frecuencia)
		Varones	Mujeres	Total	
1000-1500	1250	1	2	1 + 2 = 3	1250 × 3 =
1500-2000	1750	2	2	2 + 2 = 4	1 750 x 4 = 7 000
2000-2500	2250	5	8	5 + 8 = 13	2 250 x 13 = 29 250
2 500-3 000	2 750	7	20	7 + 20 = 27	2 750 x 27 = 74 250
3 000-3 500	3 250	12	10	12 + 10 = 22	3 250 x 22 = 71 500
3 500-4 000	3 750	16	5	16 + 5 = 21	3 750 x 21 = 78 750
4 000-4 500	4 250	4	2	4 + 2 = 6	4 250 x 6 = 25 500
4 500-5 000	4 750	2	0	2 + 0 = 2	4 750 x 2 = 9 500
5 000-5 500	5 250	1	1	1 + 1 = 2	5 250 x 2 = 10 500
Total	100			100	310 000

Propósito del interactivo. Interpretar y calcular las medidas de tendencia central de un conjunto de datos agrupados.

Respuestas.

a) 2 750 las mujeres y 3 750 los varones.

b) Se divide el total entre la cantidad de varones, es decir, 166 000 ÷ 50 y la media es 3 320 calorías. La de las mujeres 144 000 ÷ 50 = 2 880 calorías.

c) Hay varias maneras de hacerlo.

- Sumar los totales de los productos (el de hombres y el de mujeres y se divide entre la suma de las frecuencias de hombres y mujeres, es decir, (166 000 + 144 000) ÷ 100 = 3 100 calorías.
- Sumar las frecuencias por intervalo de varones y mujeres, luego multiplicar los puntos medios por frecuencia, obtener la suma y dividir entre la frecuencia total (como se pide en la actividad III).
- Sumar los valores de las medias aritméticas obtenidas para varones y mujeres, luego dividir entre 2 porque son dos valores (3 320 + 2 880) ÷ 2 = 6 200 ÷ 2 = 3 100.

Sugerencia didáctica. Los alumnos pueden emplear alguna de las formas que se señalan en el propio libro, pero la intención es que justifiquen por qué la utilizan y que expliquen qué quiere decir su resultado. En la siguiente actividad verán dos de las formas en que se puede encontrar la media aritmética del grupo.

Respuestas.
a) 2 500-3 000, el punto medio es 2 750.
b) Sí.
c) 3 100 calorías.
e) No.

Propósito de la pregunta f). Se pretende que los alumnos generalicen el procedimiento para cuando se calcula una media de dos subgrupos. Si hay que obtener la media aritmética de las calorías que consumen los alumnos de segundo grado y tenemos como datos las medias aritméticas de los tres grupos que hay en ese grado, entonces podemos sumar las tres medias y dividir entre 3. Si se quiere conocer la media aritmética de las calorías que consumen los alumnos de toda una escuela, si se conocen las medias de cada uno de los 5 grupos, éstas se suman y se divide entre 5.
Plantee a los alumnos situaciones como éstas y coméntenlas.

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que copien la información de los dos procedimientos.

a) ¿Cuál es el intervalo modal de las calorías consumidas diariamente por los adolescentes de 13 años, según los resultados del estudio? ________ ¿Cuál es el punto medio de ese intervalo? ________

b) Comparen este intervalo y el valor de su punto medio con los obtenidos en el caso de las mujeres, ¿son iguales? ________

c) ¿Cuál es la media aritmética de las calorías que consumen los adolescentes de 13 años, según los resultados del estudio? ________

d) Completen la siguiente expresión:

$$\overline{x} = \frac{\left(\text{media aritmética del número de calorías que consumen los varones} + \text{media aritmética del número de calorías que consumen las mujeres}\right)}{2} =$$

$$= \frac{(3\,320 + 2\,880)}{2} = \frac{6\,200}{2} = 3\,100$$

e) Comparen este valor con el de la media aritmética del número de calorías que consumen los varones, ¿son iguales? ________

f) ¿Cuál de las siguientes expresiones representa el procedimiento que utilizaste en el inciso b) para obtener el valor de la media aritmética del número de calorías que consumen los 100 adolescentes? ________

1. $\overline{x} = \overline{x}_1 + \overline{x}_2$
2. $\overline{x} = (\overline{x}_1)\,(\overline{x}_2)$
3. $\overline{x} = \left(\frac{\overline{x}_1 + \overline{x}_2}{2}\right)$

>>> A lo que llegamos

Para obtener el valor de la media aritmética del número de calorías que consumen los 100 adolescentes de trece años que participaron en el estudio, y dado que se tienen las frecuencias y medias aritméticas del número de calorías que consumen varones y mujeres, se pueden realizar los siguientes procedimientos:

Procedimiento 1

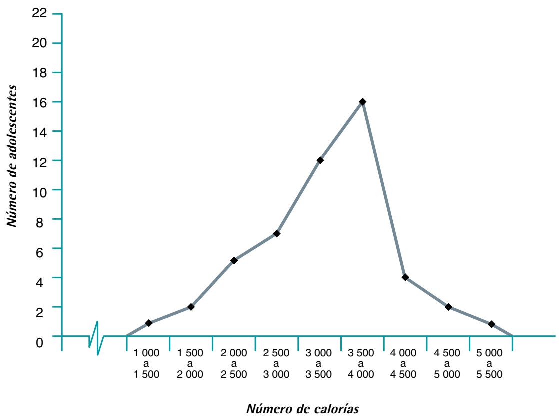
1. Sumar las frecuencias de varones y mujeres en cada intervalo para obtener la frecuencia total.
2. Calcular, para cada intervalo, el producto del punto medio y la frecuencia.
3. Obtener el cociente de la suma de los productos entre la frecuencia total.

Procedimiento 2

1. Sumar los valores de las medias aritméticas (la del número de calorías que consumen los varones y la de las mujeres).
2. Obtener el cociente de la suma de las medias entre **2**.

IV. El siguiente polígono de frecuencias presenta el número de calorías que consumen los varones. Ubica en el eje horizontal el punto que corresponde al valor de la media aritmética y a partir de él traza una línea, de color rojo, perpendicular al eje.

Número de calorías consumidas diariamente por varones de 13 años.



a) ¿En qué intervalo se encuentra el segmento que trazaste? ____________

b) Si consideras el número de varones que hay en cada intervalo y el segmento que trazaste, ¿en qué parte de la gráfica hay más varones, antes del segmento o después de él? ____________

c) ¿Cuál es el intervalo modal? ____________

233

Respuestas.

a) En el quinto (de 3 000 a 3 500 calorías).
b) Después de él.
c) De 3 500 a 4 000 calorías.
d) No, se encuentra en el intervalo anterior.
e) La media aritmética.

Ubica el punto medio del intervalo modal y traza un segmento, de color azul, perpendicular al eje horizontal que pase por él.

d) ¿En ese mismo intervalo se encuentra la media aritmética? ______

e) De izquierda a derecha, ¿qué punto se encuentra primero, la media aritmética o el punto medio del intervalo modal? ______

V. Utilicen los resultados obtenidos en la sesión y seleccionen las respuestas correctas para completar el siguiente párrafo.

De acuerdo con los resultados del estudio que se realizó para conocer los patrones alimenticios de 100 adolescentes de 13 años de edad, se encontró que la media aritmética del número de calorías que consumen es de 3 100 (3 100 / 3320 / 2880), *mientras que, si los separamos por sexo, la media aritmética del consumo de calorías en los varones es* mayor (mayor / igual / menor) *que la de las mujeres, la diferencia entre ellas es de* 220 (440 / 220) *calorías.*

En los varones, la mayor frecuencia en el consumo de calorías diarias se encuentra entre 3 500-4000 (3 500 a 4 000 / 2 500 a 3 000)*, y en el caso de las mujeres la mayor frecuencia está en el intervalo* 2 500-3000 (3 500 a 4 000 / 2 500 a 3 000).

Propósito de la actividad. En esta situación se espera que los alumnos analicen y reflexionen sobre el problema de salud que puede representar un trastorno alimenticio. Comenten que la finalidad de la estadística no es calcular sino tomar decisiones informadas de acuerdo con lo que presentan las gráficas y medidas de tendencia.

>>> Lo que aprendimos

1. Investiguen en la secuencia 11 **¿Cómo usa mi cuerpo lo que como?** de su libro **Ciencias I Volumen I**, qué, cómo y cuántas calorías deben consumir diariamente para mantenerse sanos, así como los riesgos que se tienen por no consumir las calorías adecuadas.

Conexión con **Ciencias I**
Secuencia 11: ¿Cómo usa mi cuerpo lo que como?

a) De acuerdo con esa información, ¿cómo describirían a estos dos grupos de adolescentes, los varones y las mujeres? ¿Qué grupo de adolescentes presenta mayores problemas de salud, los varones o las mujeres? ______

b) Si estuvieran a cargo de una campaña de nutrición en su escuela, ¿qué acciones realizarían para recopilar información sobre su situación nutricional?, ¿qué tipo de gráficas, tablas y medidas de tendencia central utilizarían para comunicar sus resultados a su comunidad escolar? Comenten y comparen sus respuestas con sus compañeros y su profesor.

2. En la tabla de datos agrupados de la derecha se presentan los salarios mensuales de 70 empleados de una compañía.

a) Si el punto medio del primer intervalo de salarios es 2 500, ¿cuál es el límite inferior de ese intervalo? ______

¿Y cuál es el límite superior? ______

¿Cuál es el tamaño de cada intervalo? ______

b) ¿Cuál es el salario promedio mensual (media aritmética de datos agrupados) de los 70 empleados? ______

c) ¿Cuál es el salario que perciben el mayor número de empleados de esa compañía? ______

d) Si se quiere utilizar una cantidad que represente mejor los salarios que se tiene en esta compañía, ¿cuál es el más conveniente utilizar, la media aritmética o el intervalo modal? ______ . Justifiquen su respuesta y elaboren un párrafo a modo de reporte.

Punto medio del intervalo	Frecuencia
2 500	14
7 500	12
12 500	12
17 500	10
22 500	8
27 500	6
32 500	5
37 500	3

Comparen y comenten sus respuestas con las de sus compañeros.

>>> Para saber más

Sobre cómo utilizar e interpretar resultados estadísticos en una determinada situación consulten:
http://www.inegi.gob.mx/inegi/default.asp
Ruta 1: Recursos educativos → Casos de negocios → Fábrica de artículos de plástico
Ruta 2: Recursos educativos → Casos de negocios → Restaurante típico
[Fecha de consulta: 24 de mayo de 2007].

Sobre otros aspectos en los que se calculan y utilizan promedios consulten:
http://cuentame.inegi.gob.mx
Ruta 1: Población → Educación
Ruta 2: Población → Esperanza de vida
[Fecha de consulta: 24 de mayo de 2007].
Instituto Nacional de Estadística Geografía e Informática.

Integrar al portafolios. Analice las respuestas de los alumnos a la actividad 2 de este apartado y guárdelas en su portafolios. Si lo considera necesario, repasen el *Manos a la obra* de las sesiones de esa secuencia.

Respuestas.

a) El límite inferior es 0 y el superior es 5 000. El tamaño de cada intervalo es 5 000. Para responder cuáles son los límites inferior y superior se requiere conocer el tamaño de los intervalos. Lo pueden saber si encuentran la diferencia entre el punto medio del segundo intervalo y el del primero (7 500-2 500). Si el tamaño del intervalo es 5 000 entonces el límite inferior es 0 y el superior es 5 000 (porque (0 + 5 000) ÷ 2 = 2 500).

b) Es de $15 285.71.

c) 2 500, que está en el intervalo de 0 a 5 000.

d) En esta situación la moda nos da una información que en la media está desdibujada, ya que la mayoría de los empleados (42 empleados) ganan menos de 15 000 pesos.